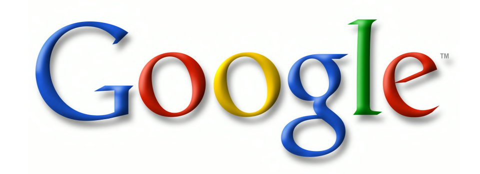
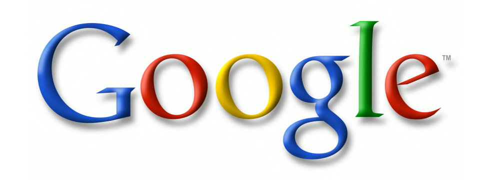
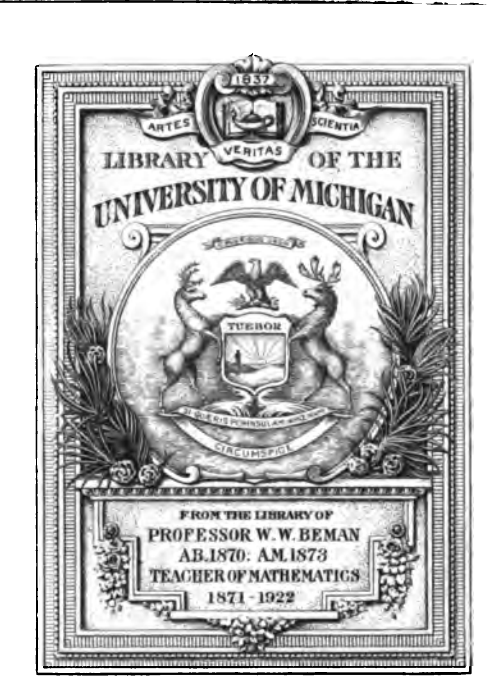
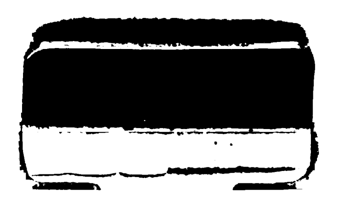





1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE
FROM THE LIBRARY OF
PROFESSOR W. W. BEMAN
AB.1870: AM.1873
TEACHER OF MATHEMATICS
1871 - 1922



КРАТКІЙ КУРСЪ

ГЕОМЕТРІИ

СЪ ПРАКТИЧЕСКИМИ ПРИМѢНЕНІЯМИ.

---

306 черт. въ текстѣ.

2-е исправленное и дополненное изданіе.

СОСТАВИЛЪ

М. А. СТРАХОВЪ.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.
ТИПОГРАФІЯ ЭКСПЕДИЦІИ ЗАГОТОВЛЕНІЯ ГОСУДАРСТВЕННЫХЪ БУМАГЪ.
1892.

Дозволено цензурою. С.-Петербургъ, 7 Мая 1891 г.

W. W. Beman
gt.
6-26-1923

Предлагаемый краткій курсъ элементарной геометріи составленъ въ виду ощущаемой потребности, въ особенности въ низшихъ спеціальныхъ школахъ, въ ознакомленіи рядомъ съ научными данными съ различными примѣненіями ихъ на практикѣ. Хотя курсъ этотъ, главнымъ образомъ, предназначается для низшихъ спеціальныхъ школъ, но мы не лишили его, какъ это часто дѣлается, по возможности строгихъ доказательствъ, будучи глубоко убѣждены въ дисциплинирующемъ значеніи геометріи, какъ въ умственномъ отношеніи, такъ и въ отношеніи языка. По нашему мнѣнію, геометрія въ отношеніи указаннаго значенія достигаетъ цѣли въ кратчайшее время сравнительно съ другими предметами преподаванія.

Если въ спеціальной школѣ, какъ это иногда бываетъ, отведено недостаточно времени для прохожденія курса геометріи въ объемѣ предлагаемаго учебника, то слѣдуетъ ограничиться для образовательной цѣли обстоятельнымъ прохожденіемъ со строгими доказательствами двухъ, трехъ главъ, наиболѣе существенныхъ, какъ напр. о треугольникахъ, равновеликихъ фигурахъ и т. п., все же прочее можетъ быть сообщено съ нѣкоторыми поясненіями вмѣсто доказательствъ.

Упражненія и разнородныя приложенія геометрическихъ истинъ, встрѣчающіяся въ этомъ курсѣ, не принаровлены исключительно къ какой нибудь одной спеціальности. Дѣло преподавателя развить болѣе тотъ или другой отдѣлъ приложеній и упражненій, смотря по спеціальности школы.

При преподаваніи этого курса, какъ упражненія, такъ и указаніе приложеній должны слѣдовать тотчасъ же за тѣми истинами, на коихъ они основываются, какъ это сдѣлано въ первыхъ двухъ главахъ учебника.

Въ предлагаемомъ курсѣ съ возможно строгими доказательствами изложена только первая часть геометріи, т. е. геометрія на плоскости.

Въ видѣ приложенія къ этому руководству мы нашли полезнымъ дать понятіе объ извлеченіи квадратнаго корня съ объясненіемъ этого дѣйствія. При прохожденіи хотя бы и краткаго курса геометріи не слѣдуетъ, по нашему мнѣнію, избѣгать вопросовъ, для рѣшенія которыхъ нужно умѣть извлекать квадратные корни, а между тѣмъ въ учебникахъ ариѳметики соотвѣтствующей статьи нѣтъ, алгебра же въ училищахъ, для которыхъ этотъ курсъ предназначенъ, не преподается.

Во избѣжаніе недоразумѣній считаемъ долгомъ предупредить, что во *введеніи* предлагаемаго учебника даны только результаты, къ которымъ преподаватель долженъ придти путемъ предварительной бесѣды съ учениками. Та часть *введенія,* въ которой дается понятіе объ аксіомѣ, теоремѣ и доказательствѣ, можетъ быть выяснена во время прохожденія курса. Когда именно слѣдуетъ приступить къ выясненію этихъ понятій, предоставляется рѣшить самому преподавателю. Тотъ или другой путь или способъ выясненія основныхъ положеній геометріи конечно находится въ зависимости отъ состава класса и отъ взгляда преподавателя на этотъ предметъ, а потому не можетъ быть предложенъ въ учебникѣ.

Введеніе.

1. Ограниченная часть пространства называется *геометрическимъ тѣломъ.*

2. Границы, отдѣляющія тѣло отъ остальнаго пространства, называются *поверхностью.*

3. Границы между частями поверхности называются *линіями.*

4. Граница между частями линіи есть *точка.*

5. Тѣла, поверхности и линіи суть различнаго рода *протяженія.*

6. Геометрія изучаетъ свойства протяженій и способы ихъ измѣренія.

7. Въ геометріи встрѣчаются истины двухъ родовъ: однѣ мы доказываемъ, т. е. убѣждаемся въ ихъ справедливости разсужденіемъ,— другія же принимаемъ безъ доказательства.

8. Истина, которую мы доказываемъ, называется *теоремой.*

9. Истина, сама по себѣ ясная и которую доказать мы не можемъ, называется *аксіомой.*

Вотъ нѣкоторыя аксіомы:

10. *Протяженія можно перемѣщать въ пространствѣ безъ измѣненія.*

11. *Равныя величины всегда можно замѣнить одну другой, причемъ не нарушится правильность разсужденія.*

12. *Если равныя величины складываются съ равными, или изъ равныхъ вычитаются равныя, то суммы или остатки получаются равные.*

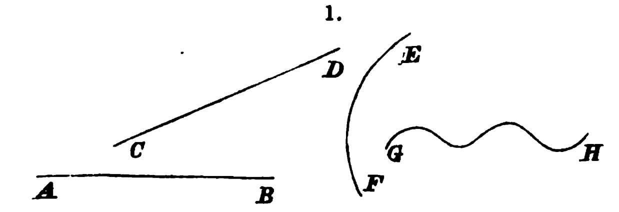
13. *Цѣлое болѣе своей части.*

14. *Сумма бо̀льшихъ величинъ болѣе суммы столькихъ же мѐньшихъ.*

15. *Если изъ неравныхъ величинъ вычесть поровну, то отъ бо̀льшей останется больше.*

I.

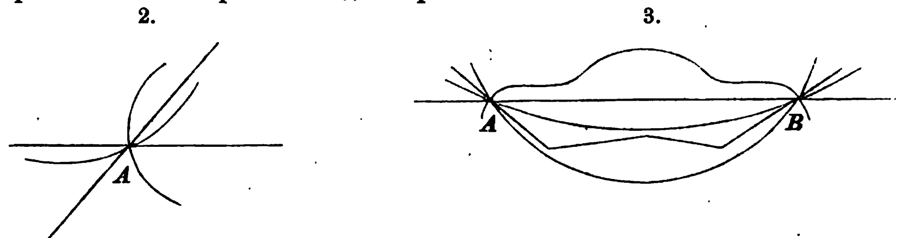
Линіи.



16. Всякій можетъ различить *прямыя* и *кривыя линіи.* Напр. (черт. 1) линіи AB и CD прямыя, а EF и GH кривыя.

17. Линія не прямая, но составленная изъ прямыхъ, называется *ломаною*.

18. Черезъ одну точку можетъ быть проведено сколько угодно прямыхъ и кривыхъ линій. Напр. (черт. 2) черезъ одну точку A проходятъ двѣ прямыя и двѣ кривыя.

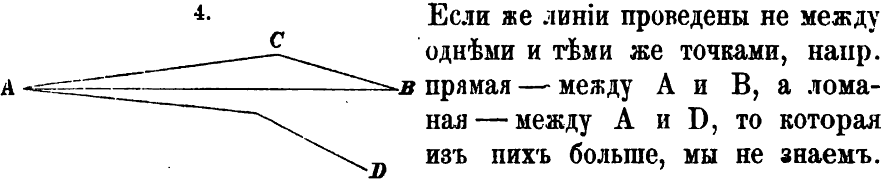


19. Возьмемъ двѣ точки A и B (черт. 3) и будемъ проводить разныя линіи такъ, чтобы каждая изъ нихъ прошла черезъ обѣ точки. Оказывается, что кривыхъ можно провести сколько угодно, а прямую только одну.

20. *Аксіома. Черезъ двѣ точки можетъ быть проведена только одна прямая.*

21. *Аксіома. Изъ линій, проведенныхъ между двумя точками, прямая короче всѣхъ.*

Если между двумя точками A и B (черт. 4) будутъ двѣ линіи — прямая AB и ломаная ACB, то мы знаемъ, что AB меньше ACB. Если же линіи проведены не между однѣми и тѣми же точками, напр. прямая — между A и B, а ломаная — между A и D, то которая изъ нихъ больше, мы не знаемъ.



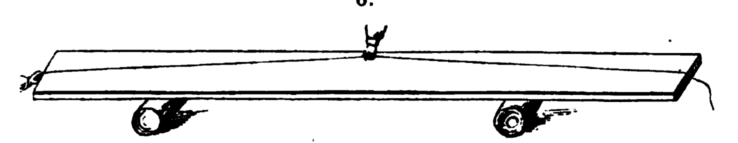
22. За *разстояніе* между двумя точками принимается прямая, воображаемая или проведенная между этими точками.

23. Для проведенія прямыхъ пользуются *линейкой*. Для провѣрки линейки проводятъ при помощи ея линію между двумя точками. Затѣмъ перекладываютъ линейку по другую сторону этихъ точекъ и опять между ними, по тому же ребру линейки, проводятъ линію (черт. 5). Если линейка вѣрна, обѣ линіи сольются, потому что между двумя точками можно провести только одну прямую (§ 20).

5.

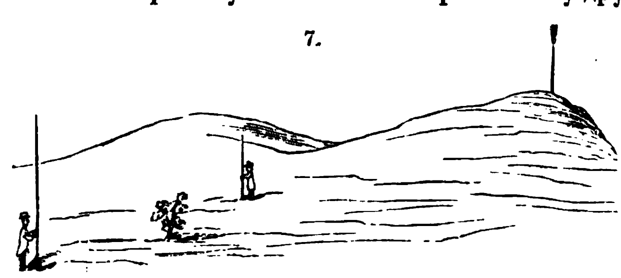
24. Болѣе длинныя прямыя проводятся при помощи *шнурка*. Положимъ, надо провести прямую на длинной доскѣ. Шнурокъ по-

крываютъ мѣломъ или углемъ и натягиваютъ его на доскѣ (черт. 6); затѣмъ приподнимаютъ его за середину и отпускаютъ. Шнурокъ оставитъ на доскѣ слѣдъ, который и будетъ прямой линіей.



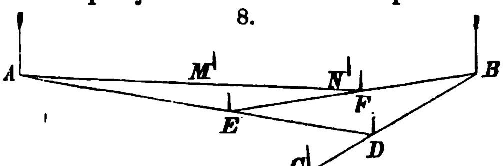
25. По землѣ проводятся еще болѣе длинныя прямыя при помощи *вѣхъ*.

Въ тѣ точки, между которыми хотятъ провести прямую, вбиваютъ главныя вѣхи (заостренные колья до трехъ и болѣе саженъ длины съ пукомъ соломы на верху). Затѣмъ кто-нибудь становится у одной изъ вѣхъ, а другой вбиваетъ промежуточную вѣху такъ, чтобы тотъ, кто смотритъ изъ за первой вѣхи, не видѣлъ второй главной вѣхи, т. е. чтобы промежуточная вѣха закрывала эту другую (черт. 7). Такимъ образомъ ставятъ промежуточныя вѣхи на столько близко одну отъ другой, что провести прямую между ними нетрудно, протягивая наприм. веревку или цѣпь.



Обозначеніе прямой линіи рядомъ вѣхъ называется *провѣшеніемъ* прямой.

Показаннымъ только-что способомъ не всегда можно провѣшить прямую. Положимъ напр. — мы находимся на берегу рѣки, за которой стоитъ вѣха A (черт. 8), верхушка же другой вѣхи B видна намъ за какой-нибудь постройкой по эту сторону рѣки. Такимъ образомъ къ первой вѣхѣ нельзя подойти, а если стать около второй, то за постройкой не видна будетъ первая вѣха. Въ этомъ случаѣ поступаютъ такъ: одинъ изъ двухъ провѣшивающихъ линію ставитъ колъ C и выравниваетъ другаго по линіи CB, который и поставитъ свой колъ D; тогда первый переходитъ со своимъ коломъ и по указанію втораго ставитъ колъ по прямой DA, положимъ, въ точкѣ E, затѣмъ первый направляетъ втораго на линію EB въ точку F; этотъ второй, въ свою очередь, выравниваетъ перваго по прямой FA и т. д., пока не найдутъ такихъ точекъ M и N, чтобы первый, смотря изъ-



1*

за своего кола, видѣлъ колъ N закрывающимъ вѣху B, а второй видѣлъ бы, что колъ M закрываетъ вѣху A.

26. На прямой, ограниченной въ точкахъ A и B (черт. 9), возьмемъ точку C. Тогда прямая AB раздѣлится на двѣ *части* AC и CB. Прямая AB *можетъ быть названа суммой* прямыхъ AC и CB, а эти послѣднія — *слагаемыми*. Мы можемъ написать: AB = AC + CB.

9.

A C B

Взявъ на AB еще какую нибудь точку, мы раздѣлимъ прямую на три части. Такимъ образомъ прямая можетъ быть раздѣлена на сколько угодно частей.

27. Можно двѣ ограниченныя прямыя сравнить между собою, т. е. можно узнать, равны ли онѣ, и если не равны, то которая изъ нихъ больше. Для этого производится *наложеніе*.

Положимъ, надо сравнить прямыя AB и CD (черт. 10). Перемѣстимъ прямую CD къ AB такъ, чтобы точка C упала въ A и линія CD направилась по AB; для этого достаточно, чтобы еще какая нибудь точка прямой CD упала на AB (§ 20). Тогда остается посмотрѣть, гдѣ находится точка D. Она можетъ упасть или на прямой AB, или на ея продолженіи, или въ точкѣ B. Если D упадетъ на прямой AB, то CD займетъ часть AB, и мы скажемъ, что AB больше CD (AB > CD); если точка D упадетъ на продолженіи AB, то AB будетъ составлять часть CD, и, стало быть, AB будетъ меньше CD (AB < CD); если точка D упадетъ въ B, то линіи *при наложеніи совпадаютъ*, и потому равны между собою (AB = CD).

10.

A B

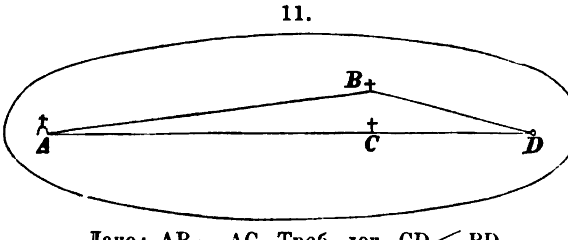
C D

Упражненія. 28. Найти нѣсколько прямыхъ, кривыхъ, ломаныхъ линій на предметахъ, которые находятся въ комнатѣ.

29. Сколько разъ могутъ пересѣчься двѣ прямыя?

30. Пусть два села B и C находятся на равномъ разстояніи отъ города A (черт. 11), т. е. прямая AB равна AC. Затѣмъ на продолженіи прямой AC лежитъ деревня D. Можно доказать, что отъ деревни D къ селу C ближе, чѣмъ къ B.

11.



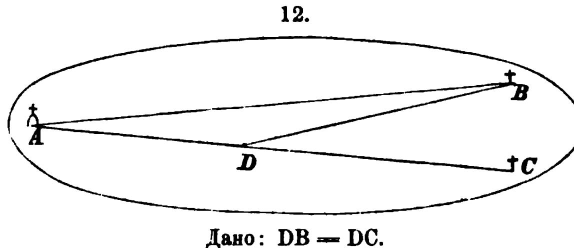
Дано: AB = AC. Треб. док. CD < BD.

Доказательство. Между точками A и D проведены двѣ линіи:

одна прямая, AD, а другая ломаная, ABD. Мы знаемъ (§ 21), что AD меньше AB + BD. Прямая AD равна AC + CD. Подставивъ AC + CD вмѣсто AD, получимъ, что AC + CD < AB + BD. Если отъ этихъ неравныхъ суммъ отнимемъ поровну, то остатокъ отъ меньшей долженъ быть меньше (§ 15). Мы отнимемъ отъ одной суммы AC, а отъ другой AB (дано, что AB = AC). Получимъ, что CD должна быть меньше BD. Это и надо было доказать.

31. Отъ города A (черт. 12) въ нѣкоторомъ разстояніи находятся села B и C. По дорогѣ AC лежитъ деревня D, которая одинаково отстоитъ отъ селъ B и C, т. е. DB = DC. Надо доказать, что отъ A до B ближе, чѣмъ отъ A до C, т. е. что AB < AC.

12.

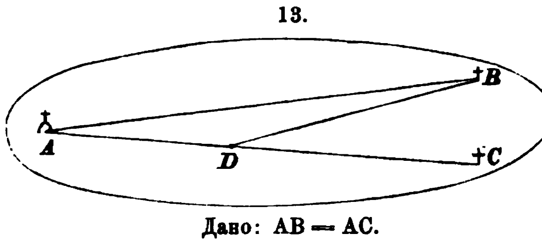


Дано: DB = DC.
Треб. док. AB < AC.

Доказательство. Между двумя точками A и B прямая AB должна быть меньше ломаной AD + DB (§ 21); DB по данному условію равна DC; а потому, подставивъ DC вмѣсто DB, получимъ, что AB должна быть меньше AD + DC; а такъ какъ AD + DC равно AC, то выходитъ, что AB должна быть меньше AC. Это мы и хотѣли доказать.

32. Въ равныхъ разстояніяхъ отъ города A находятся села B и C (черт. 13), и по дорогѣ AC лежитъ деревня D. Доказать, что отъ D до B дальше, нежели до C.

13.



Дано: AB = AC.
Треб. док. DB > DC.

Доказательство. Между двумя точками A и B ломаная AD + DB больше прямой AB; но вмѣсто AB возьмемъ равную ей AC, которую можно разсматривать, какъ AD + DC,—имѣемъ тогда, что AD + DB больше AD + DC. Отнимемъ теперь отъ неравныхъ суммъ поровну — по AD, получимъ DB больше DC, что и надо было доказать.

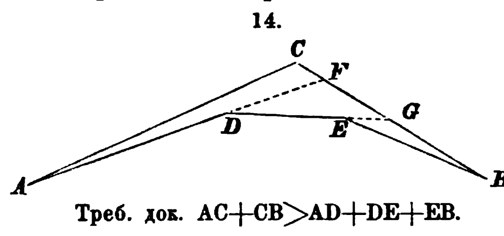
---

33. *Теорема. Если между двумя точками двѣ ломаныхъ линіи* (выпуклыхъ въ одну сторону), *то наружная ломаная больше внутренней.*

Пусть между точками A и B будутъ двѣ ломаныхъ линіи ACB и ADEB (черт. 14). Надо доказать, что AC+CB больше, чѣмъ AD+DE+EB.

Продолжимъ прямыя AD и DE до пересѣченія съ наружной ломаной. Между точками A и F ломаная AC+CF больше прямой AD+DF; между точками D и G ломаная DF+FG больше DE+EG; такъ точно и EG+GB больше EB.

14.



Треб. док. AC+CB>AD+DE+EB.

Такъ какъ сумма бо́льшихъ величинъ болѣе суммы меньшихъ (§ 14), то

AC+CF+DF+FG+EG+GB>AD+DF+DE+EG+EB.

а вычтя по DF+EG (§ 15), будемъ имѣть

$$AC+CF+FG+GB>AD+DE+EB;$$

замѣнивъ CF+FG+GB прямой CB (§ 11), получимъ

$$AC+CB>AD+DE+EB,$$

что и нужно было доказать.

34. *Примѣчаніе. Изъ двухъ кривыхъ* (выпуклыхъ въ одну сторону), *ограниченныхъ двумя точками, наружная больше внутренней.* То же можно сказать, когда одна изъ линій ломаная, а другая кривая.

Измѣреніе прямыхъ.

35. *Измѣрить длину прямой значитъ узнать, сколько разъ она содержитъ въ себѣ другую длину, принятую за единицу.*

За единицу длины въ Россіи принимаютъ длину *аршина, сажени, фута, дюйма* и проч.

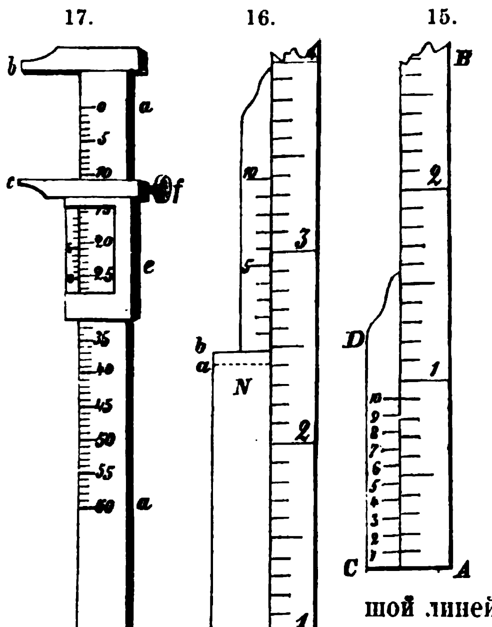
Каждый знаетъ, какъ производится измѣреніе небольшихъ линій.

36. Чтобы измѣрить длинную прямую, провѣшенную на землѣ, употребляется *мѣрная цѣпь*, длиною въ 10 саж. Каждое звено этой цѣпи въ одинъ футъ; черезъ каждую сажень прикрѣплена дощечка съ цифрой, означающей число саженъ. На концахъ цѣпи кольца.

Измѣреніе производятъ два человѣка. Одинъ, стоя у начальной вѣхи, держитъ одно кольцо мѣрной цѣпи, а другой идетъ по измѣряемой линіи и, натянувъ цѣпь, втыкаетъ колышекъ сквозь второе кольцо; затѣмъ, снявъ цѣпь съ этого колышка, идетъ далѣе; между тѣмъ первый, дойдя до оставленнаго колышка, надѣваетъ на него другой конецъ цѣпи. Когда передній мѣрщикъ, натянувъ цѣпь, воткнетъ попрежнему слѣдующій колышекъ, задній выдергиваетъ первый колышекъ, и оба мѣрщика подвигаются далѣе. Передній имѣетъ при себѣ

10 колышковъ и потому, когда онъ израсходуетъ всѣ, будетъ отмѣрено 100 саженъ. Тогда второй передаетъ всѣ собранные имъ 10 колышковъ первому, и измѣреніе продолжается попрежнему.

37. Когда хотятъ измѣрить прямую болѣе точно, напр. найти, сколько она содержитъ въ себѣ дюймовъ, линій и десятыхъ частей линій, употребляютъ приборъ, называемый *ноніусомъ*.



Пусть AB (черт. 15) будетъ линейка, раздѣленная на дюймы и линіи. На маленькой линейкѣ CD, которая можетъ скользить вдоль первой, взята длина въ 9 линій и раздѣлена на 10 равныхъ частей. Эта маленькая линейка и называется ноніусомъ. Каждое дѣленіе ноніуса равняется $^9/_{10}$ линіи и потому оно отличается отъ одного дѣленія большой линейки на $^1/_{10}$ линіи. Положимъ, что надо измѣрить длину пластинки MN (черт. 16). Приложимъ эту пластинку къ большой линейкѣ такъ, чтобы одинъ конецъ пластинки былъ у начала линейки, и придвинемъ ноніусъ къ другому концу пластинки. Посмотрѣвъ на дѣленія линейки, увидимъ, что длина нашей пластинки 2 дюйма 4 линіи съ излишкомъ *ab*. Чтобы измѣрить этотъ излишекъ, замѣчаемъ, которое дѣленіе ноніуса совпадаетъ съ дѣленіемъ линейки. На нашемъ чертежѣ совпадаетъ седьмое дѣленіе; значитъ, на семи дѣленіяхъ линейки помѣщается семь дѣленій ноніуса и излишекъ *ab*; слѣдовательно, *ab* есть разность между семью дѣленіями линейки и семью дѣленіями ноніуса, а потому длина *ab* равна $^7/_{10}$ линіи. И такъ длина всей пластинки будетъ 2 дюйма 4,7 линіи.

38. Для измѣренія толщины предметовъ употребляется особый инструментъ, называемый *штангенциркулемъ* (черт. 17). Онъ состоитъ изъ графленой стальной линейки *a* и двухъ ножекъ *b* и *c*. Одна

изъ ножекъ, *b*, наглухо придѣлана въ концу линейки, другая же, *c*, можетъ передвигаться вдоль линейки вмѣстѣ съ коробкой *e*.

Въ коробкѣ сдѣланъ прорѣзъ, чрезъ который видны дѣленія линейки; у прорѣза коробки имѣется ноніусъ. Коробку можно закрѣпить на мѣстѣ нажимнымъ винтомъ *f*. Чтобы произвести измѣреніе, надо помѣстить предметъ между ножками прибора и отсчитать сквозь прорѣзъ коробки число дѣленій линейки и ноніуса.

Упражненія. 39. Какъ долженъ быть устроенъ ноніусъ, чтобы можно было измѣрять съ точностью до $1/_{100}$ вершка?

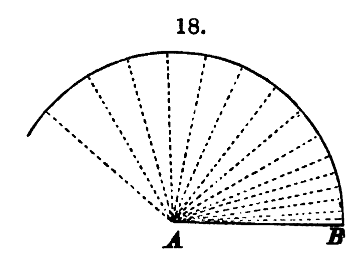
40. Какъ долженъ быть устроенъ штангенциркуль, чтобы можно было измѣрить толщину проволоки съ точностью до $1/_{100}$ дюйма, или сантиметра?

Окружность.

41. Поверхности тѣлъ могутъ быть различной формы. Можетъ быть такая поверхность, къ которой прямая линія прилегаетъ вся, если ее провести черезъ двѣ точки, взятыя *произвольно* на этой поверхности. Такая поверхность называется *плоскостью.*

42. Понятно, что всякая прямая линія можетъ быть нанесена на плоскость. Изъ кривыхъ линій не всѣ могутъ лежать на плоскости. Тѣ изъ кривыхъ, которыя могутъ быть нанесены на плоскость, называются плоскими кривыми*).

43. Возьмемъ на плоскости ограниченную прямую AB и будемъ ее вращать по плоскости такъ, чтобы точка A оставалась на мѣстѣ, а B двигалась (черт. 18). Тогда точка B опишетъ плоскую кривую, каждая точка которой будетъ на одномъ и томъ же разстояніи AB отъ точки A. Такая кривая называется окружностью.



И такъ, — *окружность есть плоская кривая, всѣ точки которой находятся въ одномъ разстояніи отъ одной точки.* Эта точка называется *центромъ* окружности. Часть окружности называютъ обыкновенно *дугой.*

*) То же можно сказать о линіяхъ ломаныхъ; ломаныя, разсматриваемыя въ § 33, суть *плоскія* ломаныя.

44. Окружность или дугу проводятъ при помощи *циркуля* (черт. 19). Надо, положимъ, провести дугу, центръ которой въ точкѣ А.

19.

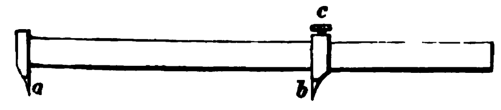
Острую ножку циркуля ставимъ въ точку А, а другой, на которой насаженъ карандашъ, чертимъ линію; эта линія и будетъ окружность, такъ какъ всѣ точки ея на одномъ разстояніи отъ А, если только ножки циркуля не сдвигались и не раздвигались, пока мы чертили линію.

45. Когда приходится вычерчивать окружности значительнаго радіуса, напр. въ столярныхъ работахъ, употребляютъ деревянный циркуль со стальными наконечниками (чертежъ 20). Чтобы ножки такого циркуля лучше удерживались въ одномъ разстояніи, къ одной ножкѣ циркуля придѣлана металлическая скоба *ab*, которая проходитъ сквозь другую ножку циркуля. При помощи нажимнаго винта *c* можно прочно закрѣпить ножку циркуля.

20.

46. Для вычерчиванія дугъ большихъ радіусовъ употребляется также раздвижной циркуль (штангенциркуль). Одна изъ ножекъ этого циркуля, *a*, (черт. 21) наглухо прикрѣплена къ концу линейки, а другая, *b*, свободно передвигается вдоль линейки и можетъ быть закрѣплена посредствомъ винта *c*.

21.



47. На чертежѣ 22 представленъ *пружинный* циркуль. Его головка А не имѣетъ шарнира и составляетъ съ ножками АВ и АС одинъ кусокъ стали. Головка закалена и отличается упругостью, отчего ножки стремятся разойтись; они удерживаются крылатой гайкой D (*барашкомъ*), которая навертывается на винтъ.

22.

---

48. Проведемъ прямую отъ какой нибудь точки дуги до центра; напр. отъ точки В прямую ВА (черт. 19). Эта прямая представить намъ разстояніе (§ 22) дуги отъ центра, называемое радіусомъ. И такъ *радіусъ* есть разстояніе отъ центра до дуги, или все равно—прямая, проведенная отъ центра къ какой нибудь точкѣ окружности.

Понятно, что всѣ радіусы одной дуги равны между собой.

49. Часть плоскости, которую окружность ограничиваетъ со всѣхъ сторонъ, называется *кругомъ*.

Окружности или круги называются равными, когда при наложеніи совпадаютъ.

50. *Теорема. Двѣ окружности и два круга равны между собой, если ихъ радіусы равны.*

Пусть будутъ два круга, которыхъ радіусы равны между собой.

Наложимъ одинъ кругъ на другой такъ, чтобы ихъ центры совпали. Тогда всѣ точки одной окружности упадутъ на другую окружность, потому что иначе радіусы не были бы равны между собой. И такъ, круги при наложеніи совпадутъ, а это значитъ, что они равны между собою.

Примѣчаніе. Окружности, имѣющія одинъ центръ но различные радіусы, называются *концентрическими*. Если два круга разныхъ радіусовъ наложить одинъ на другой такъ, чтобы ихъ центры совпали, то получатся концентрическіе круги.

51. Прямая, соединяющая двѣ точки окружности, какъ напр. CD, называется *хордой*. Хорда, которая проходитъ черезъ центръ, называется *діаметромъ*. Напр. AB — діаметръ (черт. 23).

23.

52. *Діаметръ составляетъ сумму двухъ радіусовъ*; такъ AB=OA+OB или AB=2OA.

Во всякой окружности можно провести сколько угодно діаметровъ.

Всѣ діаметры одной окружности равны между собой.

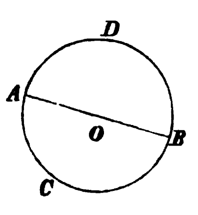
53. *Теорема. Діаметръ окружности больше всякой другой хорды.*

Пусть AB (черт. 23) будетъ діаметръ, а CD хорда. Докажемъ, что AB больше CD. Проведемъ радіусы OD и OC.

Между точками D и C ломаная DO+OC больше прямой DC; но радіусы DO и OC можно замѣнить радіусами AO и OB; тогда получимъ, что AO+OB больше DC или AB больше DC.

54. *Теорема. Діаметръ раздѣляетъ окружность и кругъ на двѣ равныя части.*

24.



Пусть прямая AB (черт. 24) будетъ діаметръ даннаго круга.

Если перегнуть чертежъ по діаметру, то часть круга ACB покроетъ часть ADB, и каждая точка дуги ACB упадетъ на дугу ADB, такъ какъ иначе не всѣ радіусы даннаго круга были бы равны

между собой, что невозможно. Слѣдовательно, обѣ части круга совпадутъ и потому равны между собой.

Упражненія. 55. Указать какую-нибудь плоскую поверхность, кривую, ломаную.

56. Хорошо отстругана плоская доска. Какъ убѣдиться, что она дѣйствительно плоская (при помощи линейки)?

57. Указать какую-нибудь плоскую кривую линію, неплоскую кривую.

58. Придумать какой-нибудь простой приборъ для проведенія большихъ окружностей на землѣ.

59. Если окружность описана радіусомъ въ одинъ аршинъ, то гдѣ находится точка, которая удалена отъ центра этой окружности на 3 четверти аршина, на полъ-аршина, на 16 вершковъ, на 18 вершковъ?

60. Дана точка А. Требуется найти нѣсколько точекъ, отстоящихъ отъ точки А на полъ-аршина.

Рѣшеніе. Раздвинемъ ножки циркуля на полъ-аршина, поставимъ острую ножку въ точку А, другой ножкой чертимъ дугу и на ней беремъ нѣсколько точекъ. Задача рѣшена, потому что всѣ взятыя на дугѣ точки находятся отъ А на разстояніи полъ-аршина.

Примѣчаніе: Если мы раздвигаемъ ножки циркуля на полъ-аршина, то радіусъ дуги получается тоже въ полъ-аршина, а потому вмѣсто словъ «раздвинемъ ножки циркуля на полъ-аршина», мы будемъ говорить впредь: „*беремъ радіусъ въ полъ-аршина.*"

Когда въ данную точку мы ставимъ острую ножку циркуля, а другой ножкой описываемъ дугу, то данная точка дѣлается центромъ этой дуги; поэтому вмѣсто словъ: «острую ножку циркуля поставимъ въ данную точку,» будемъ говорить: *«данную точку принимаемъ за центръ.»*

61. Дана прямая или кривая линія и внѣ ея точка А. Найти на линіи точку, которая отстоитъ отъ А на $^3/_4$ аршина.

Рѣшеніе. Принимая точку А за центръ, радіусомъ въ $^3/_4$ арш. описываемъ дугу. Точка пересѣченія дуги съ данной линіей и будетъ искомая.

62. На произвольной прямой отдѣлить часть, равную суммѣ данныхъ прямыхъ, вычесть одну прямую изъ другой, увеличить данную прямую въ нѣсколько разъ (умножить), узнать сколько разъ одна линія содержится въ другой.

63. Выпрямить данную ломаную.

64. Построить два равныхъ круга.

65. Построить половину круга даннаго радіуса.

66. Даны двѣ точки. Найти третью, которая отъ одной изъ данныхъ точекъ отстоитъ на полъ-аршина, а отъ другой на $^3/_4$ арш.

67. Найти точку, равно удаленную отъ концовъ данной прямой. Найти нѣсколько такихъ точекъ.

68. Даны двѣ точки. Найти точку, которая отстояла бы отъ одной изъ данныхъ точекъ вдвое далѣе, чѣмъ отъ другой. Найти нѣсколько такихъ точекъ.

69. Поставить три точки A, B и C такъ, чтобы разстоянія между ними были равны, т. е. AB=BC=AC.

70. Описать дугу такъ, чтобы она проходила чрезъ данную точку.

Провести нѣсколько такихъ дугъ однимъ радіусомъ. Какъ расположены всѣ центры этихъ дугъ?

71. Провести даннымъ радіусомъ дугу такъ, чтобы она проходила черезъ данную точку, а центръ ея находился бы на данной линіи.

72. Описать окружность такъ, чтобы она проходила черезъ двѣ данныя точки.

73. Описать нѣсколько окружностей такъ, чтобы данная ограниченная прямая была для нихъ хордой.

74. Описать дугу даннымъ радіусомъ такъ, чтобы она проходила черезъ двѣ данныя точки.

75. Отъ точки, взятой на окружности, провести хорду, равную данной прямой.

76. Найти на данной окружности двѣ точки въ наибольшемъ разстояніи одна отъ другой.

77. Найти центръ даннаго круга, когда радіусъ его извѣстенъ.

78. Доказать, что изъ прямыхъ, проведенныхъ отъ точки данной внѣ окружности до окружности, длиннѣе всѣхъ та, которая проходитъ черезъ центръ.

Доказывается какъ въ § 31.

79. Отыскать самую короткую изъ прямыхъ, которыя можно провести отъ точки, данной внѣ окружности къ окружности.

Доказать, что она самая короткая.

80. Взять точку внутри окружности и найти наибольшее и наименьшее разстояніе отъ нея до окружности.

81. Поставить нѣсколько точекъ на одномъ и томъ же разстояніи отъ окружности. Какъ располагаются эти точки?

82. Взять точку внѣ окружности и, принявъ ее за центръ, описать окружность радіусомъ, равнымъ наименьшему разстоянію отъ точки до окружности. Сдѣлать то же радіусомъ, равнымъ наибольшему разстоянію отъ точки до окружности.

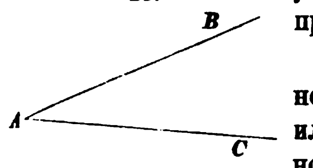
Показать, что разстояніе между центрами въ одномъ случаѣ равно суммѣ радіусовъ, а въ другомъ — ихъ разности.

83. Сдѣлать то же, что въ предъидущемъ упражненіи, взявъ точку внутри окружности.

II.

Углы.

84. Когда двѣ прямыя проведены отъ одной точки, онѣ образуютъ *уголъ*. Напр. (черт. 25) двѣ прямыя AB и AC образуютъ уголъ. Точка A называется *вершиной* угла, а прямыя AB и AC его *сторонами* или *боками*.

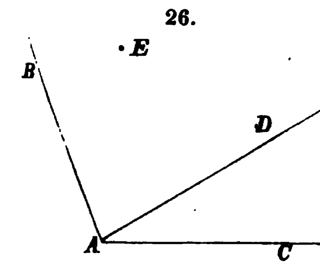


25.

Уголъ обозначается и читается или одной буквой, которая пишется около вершины, или тремя буквами. Замѣтимъ, что когда нужно прочитать уголъ тремя буквами, то букву при вершинѣ слѣдуетъ читать между буквами, стоящими у сторонъ. Напр. данный уголъ можно назвать BAC или CAB. Вмѣсто слова «уголъ» пишутъ значекъ « $\angle$ ».

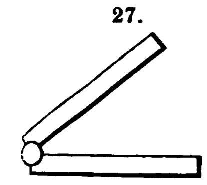
Стороны угла направляются *отъ* вершины. Поэтому нужно читать: сторона AB, а не BA.

85. Между сторонами угла BAC возьмемъ точку D (черт. 26) и проведемъ отъ вершины A черезъ эту точку D прямую. Тогда уголъ раздѣлится на двѣ части: $\angle$ BAD и $\angle$ DAC. Уголъ BAC можно назвать суммой угловъ BAD и DAC, т. е. $\angle BAC = \angle BAD + \angle DAC$.



26.

Если взять еще точку E и провести прямую AE, то данный уголъ раздѣлится на три части. Такимъ образомъ уголъ можно раздѣлить на сколько угодно частей.

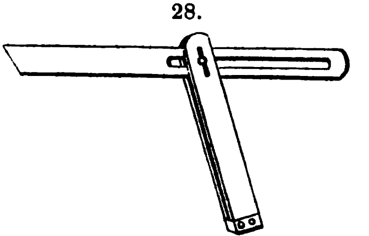

27.

86. Для перенесенія угловъ на чертежѣ можетъ служить приборъ, называемый *малкой*. Онъ состоитъ изъ двухъ линеекъ, соединенныхъ шарниромъ (черт. 27), какъ ножки циркуля.

Когда нужно перенести уголъ съ одного мѣста на другое, накладываютъ малку на данный уголъ такъ, чтобы внутренніе края линеекъ шли по сторонамъ угла, потомъ, не сдвигая и не раздвигая линеекъ, переносятъ малку туда, гдѣ нужно начертить уголъ, и проводятъ прямыя по внутреннимъ краямъ линеекъ.

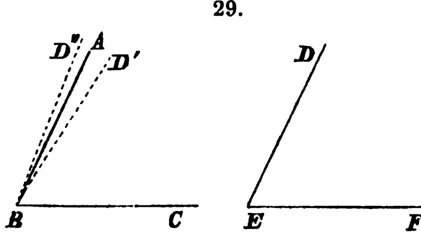
87. Когда нужно перенести уголъ съ готовой вещи на изготовляемую, столяры употребляютъ малку особаго устройства

(черт. 28). Одна линейка этой малки гораздо толще другой. Сначала прилажать малку къ вещи такъ, чтобы ея линейки охватывали переносимый уголъ; закрѣпивъ затѣмъ малку при помощи винта, переносятъ ее на ту доску, на которую требуется перенести уголъ; тонкую линейку кладутъ на доску, а толстую прижимаютъ къ краю доски и отмѣчаютъ на доскѣ карандашемъ положеніе тонкой линейки. Край доски и проведенная линія (риска) образуютъ требуемый уголъ.


28.

---

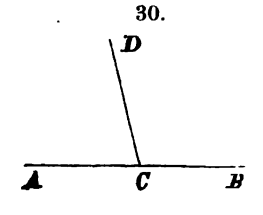
88. Для сравненія угловъ ABC и DEF (черт. 29) необходимо *наложить* одинъ уголъ на другой, напр. ∠ DEF на ∠ ABC такъ, чтобы вершина E упала въ B, сторона EF пошла по BC и чтобы оба угла находились по одну сторону BC. Теперь остается посмотрѣть, гдѣ пойдетъ сторона ED. Она можетъ пойти или внутри угла ABC, или внѣ его, или по сторонѣ BA. Если ED пойдетъ внутри угла ABC, какъ BD′, то уголъ DEF займетъ только часть угла ABC и потому будетъ меньше его; если ED пойдетъ внѣ угла ABC, напр. по направленію BD″, то уголъ ABC будетъ меньше DEF, потому что составитъ часть послѣдняго; если сторона ED пойдетъ по BA, то ∠ DEF займетъ весь ∠ ABC или *совпадетъ* съ нимъ, и тогда углы будутъ равны между собой.



29.

Упражненія. 89. Построить уголъ; раздѣлить его на четыре какія-нибудь части; обозначить буквами какъ уголъ, такъ и его части. Прочитать уголъ и каждую его часть. Прочитать сумму первыхъ двухъ частей, сумму послѣднихъ двухъ частей. Прочитать — на какой уголъ каждая часть меньше цѣлаго угла.

90. Какъ производится наложеніе одного угла на другой? Что въ этомъ случаѣ зависитъ отъ насъ и что не отъ насъ? Какіе углы называются равными? Сдѣлается ли уголъ больше, когда стороны его продолжить?



30.

91. Пусть будетъ прямая AB (черт. 30), которую въ точкѣ C встрѣчаетъ другая прямая DC. Здѣсь мы имѣемъ два угла: ∠ ACD и ∠ DCB. Сторона CD принадлежитъ обоимъ этимъ угламъ, или какъ говорятъ, *общая*; другія же двѣ сто-

роны CA и CB составляютъ одну прямую AB. Такіе два угла называются смежными. Значитъ, *смежными углами называются такіе два угла, у которыхъ одна сторона общая, а другія двѣ стороны составляютъ одну прямую.*

92. Если мы возьмемъ смежные углы и наложимъ одинъ изъ нихъ на другой, то окажется, что они или неравны, или равны между собой. *Прямыя, которыя, встрѣчаясь, образуютъ равные смежные углы, называются перпендикулярными одна къ другой.*

Вмѣсто слова «перпендикулярна» часто употребляется знакъ «$\perp$». Если CD и AB образуютъ равные смежные углы, то пишутъ CD $\perp$ AB или AB $\perp$ CD.

Чтобы имѣть понятіе о видѣ перпендикулярныхъ линій, достаточно перегнуть по прямому краю листокъ бумаги и опять разогнуть его. Между сгибомъ и прямымъ краемъ листка образуются равные смежные углы, а потому сгибъ будетъ перпендикуляренъ къ краю, или край перпендикуляренъ къ сгибу.

93. *Теорема. Изъ всякой точки, взятой на прямой, можно возставить только одинъ перпендикуляръ къ этой прямой.*

31.

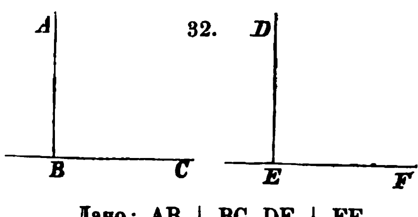
D E

A C B

Дано: CD $\perp$ AB или $\angle$ ACD = $\angle$ DCB.
Треб. док. CE не $\perp$ AB.

Пусть CD $\perp$ AB (черт. 31). Надо доказать, что всякая другая прямая, проведенная отъ точки C, напр. CE, не будетъ перпендикулярна къ AB. Прямая CE образуетъ съ прямой AB углы ACE и ECB, которые не равны, потому что для образованія этихъ угловъ отъ одного изъ данныхъ равныхъ угловъ надо отнять уголъ DCE, а къ другому прибавить тотъ же уголъ. А если углы ACE и ECB не равны, то линія CE не перпендикулярна къ AB. То же можно доказать и о всякой другой линіи.

94. Каждый изъ равныхъ смежныхъ угловъ называется прямымъ угломъ. Другими словами: *прямой уголъ тотъ, который равенъ своему смежному.* Изъ понятія о перпендикулярѣ (§ 92) слѣдуетъ, что стороны прямаго угла перпендикулярны одна къ другой.



Дано: AB $\perp$ BC DE $\perp$ EF.
Тр. док. $\angle$ ABC = $\angle$ DEF.

95. *Теорема. Всѣ прямые углы равны между собой.*

Пусть углы ABC и DEF (черт. 32) прямые. Другими словами: пусть AB $\perp$ BC и DE $\perp$ EF. Надо доказать, что эти углы равны между собой.

Наложимъ $\angle$ DEF на $\angle$ ABC такъ, чтобы вершина E упала въ B,

и сторона EF пошла по BC. Тогда ED, перпендикулярная къ EF, будетъ перпендикулярна и къ BC, а такъ какъ и BA перпендикулярна къ BC, то ED должна совпасть съ BA (§ 93). Стало быть, прямые углы при наложенiи совпадаютъ, а это значитъ, что они равны между собой.

96. Такъ какъ прямой уголъ всегда одной величины, то съ нимъ сравниваютъ другiе углы. Всѣ углы, которые больше прямаго, называются *тупыми*, а углы меньше прямаго *острыми*.

Прямой уголъ принимается за мѣру угловъ; такъ напр. говорятъ, что такой-то уголъ составляетъ половину прямаго, полтора прямаго, или сумма такихъ-то угловъ равна четыремъ, шести прямымъ угламъ. Прямой уголъ часто обозначаютъ буквой d; пишутъ напр., что такой-то уголъ равенъ $^2/_3\ d$.

33.

97. Для черченiя перпендикуляровъ или прямыхъ угловъ употребляется *чертежный треугольникъ* (черт. 33). Это деревянная треугольная дощечка, два края которой составляютъ прямой уголъ. Если къ данной прямой приложить одинъ изъ этихъ краевъ, а къ другому приложить линейку и по ней провести линiю, то получимъ перпендикуляръ къ данной прямой. Для той же цѣли служитъ и *наугольникъ* (черт. 34).

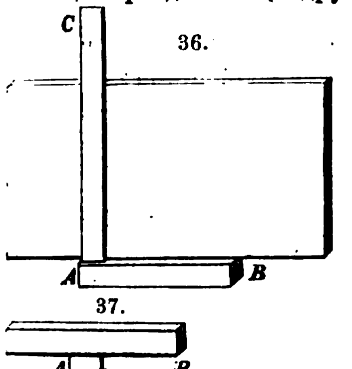
34.

35.

Понятно, если приборъ невѣренъ, то чертежъ получится неправильный. Чтобы повѣрить наугольникъ, надо приложить его къ линейкѣ (черт. 35) ребромъ BC и провести прямую по BA; затѣмъ, перевернувъ треугольникъ, придать ему положенiе ABD и опять провести прямую по тому же ребру отъ той же точки B. Если эта прямая сольется съ первой, то приборъ вѣренъ; если же нѣтъ, то невѣренъ, потому что къ прямой DC изъ одной точки B можетъ быть возставленъ только одинъ перпендикуляръ (§ 93).

98. Часто бываетъ нужно провести прямую на доскѣ перпендикулярно къ ея краю. Для этого столяры употребляютъ наугольники

нѣсколько другаго устройства. Въ этихъ наугольникахъ (черт. 36) одна линейка гораздо толще другой. Чтобы къ краю доски провести перпендикуляръ, кладутъ тонкую линейку AC на доску, а къ краю доски прижимаютъ толстую такъ, чтобы она могла только скользить по этому краю; такимъ образомъ подводятъ инструментъ къ той точкѣ, отъ которой надо провести перпендикуляръ.



На чертежѣ 37 представленъ наугольникъ, называемый *те* (винкельгакъ) по имени буквы, на которую похожъ. Онъ служитъ столяру и какъ простая линейка, и какъ наугольникъ.

37.

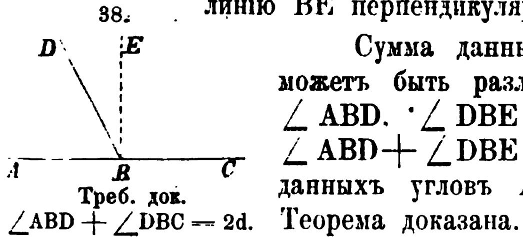
---

99. *Теорема. Сумма смежныхъ угловъ равна двумъ прямымъ угламъ.*

Пусть будутъ смежные углы ABD и DBC (черт. 38).

Докажемъ, что оба эти угла вмѣстѣ составятъ два прямыхъ угла.

Для доказательства проведемъ вспомогательную линію BE перпендикулярно къ AC.

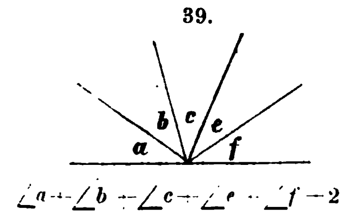


Треб. док. $\angle ABD + \angle DBC = 2d$.

Сумма данныхъ угловъ ABD и DBC можетъ быть разложена на три слагаемыхъ: $\angle ABD$, $\angle DBE$ и $\angle EBC$, а такъ какъ $\angle ABD + \angle DBE = d$ и $\angle EBC = d$, то сумма данныхъ угловъ ABD и DBC равна 2 d. Теорема доказана.

100. *Слѣдствіе* 1. Когда величина одного изъ смежныхъ угловъ извѣстна, то легко найти величину другаго; стоитъ только вычесть изъ 2 d величину извѣстнаго угла. Напр. если одинъ уголъ составляетъ $\frac{2}{3}d$, то другой будетъ $1\frac{1}{3}d$, или если одинъ уголъ равенъ $1\frac{1}{2}d$, то другой — $\frac{1}{2}d$.

101. *Слѣдствіе* 2. *Если два угла равны между собой, то и смежные имъ углы также равны.*

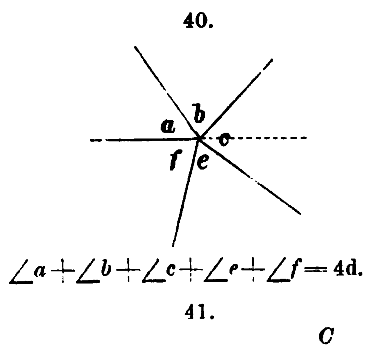


$\angle a + \angle b + \angle c + \angle e + \angle f = 2d$.

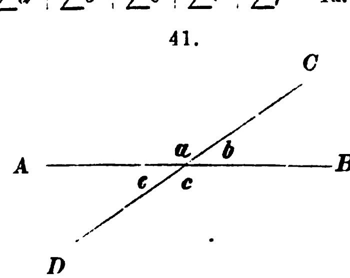
102. *Слѣдствіе* 3. *Сумма всѣхъ угловъ, расположенныхъ по одну сторону прямой при общей на ней вершинѣ, равна двумъ прямымъ угламъ.* Это потому (черт. 39), что изъ такихъ угловъ всегда возможно составить смежные.

103. *Слѣдствіе 4. Сумма всѣхъ угловъ, расположенныхъ вокругъ общей вершины, равна четыремъ прямымъ* (черт. 40).

40.



41.



104. Пусть будутъ двѣ пересѣкающіяся прямыя AB и CD (черт. 41). Онѣ образуютъ четыре угла: *a*, *b*, *c* и *e*. Изъ нихъ можно образовать четыре пары угловъ смежныхъ: *a* и *b*, *b* и *c*, *c* и *e*, *a* и *e*. Кромѣ того можно разсматривать еще двѣ пары угловъ *a* и *c*, *b* и *e*, которые называются противоположными при вершинѣ.

Противоположными углами называются такіе два угла, у которыхъ стороны одного суть продолженія сторонъ другого.

105. *Теорема. Противоположные углы равны между собой.*

Докажемъ напр., что $\angle a$ равенъ углу c (черт. 41). Для этого возьмемъ на помощь одинъ изъ остальныхъ угловъ, хоть $\angle b$. Углы a и b смежные, поэтому $\angle a = 2d - \angle b$ (§ 100); но углы c и b тоже смежные, значитъ вмѣсто $2d - b$ можно подставить $\angle c$. Тогда получимъ, что $\angle a = \angle c$.

Упражненія. 106. Изъ точки, взятой на прямой линіи, проведены двѣ прямыя. Сколько получилось паръ смежныхъ угловъ? Указать ихъ.

107. Даны неравные смежные углы ABC и CBD. Съ помощью наугольника изъ вершины этихъ угловъ B возставить перпендикуляръ къ прямой AD. Прочитать разность между каждымъ изъ данныхъ угловъ и прямымъ.

108. Данъ острый или тупой уголъ. Построить разность между даннымъ угломъ и прямымъ (съ помощью наугольника).

109. Прибавить къ данному острому углу прямой уголъ. Къ тупому углу прибавить прямой. Вычесть прямой уголъ изъ тупаго (наугольникъ).

110. Какой величины долженъ быть каждый изъ смежныхъ угловъ, если разность ихъ равна прямому углу?

111. Можно ли построить два острыхъ угла такъ, чтобы разность между ними была равна прямому углу?

112. Какова должна быть разность между острыми углами?

113. Можно ли построить два тупыхъ угла, которыхъ разность равна прямому углу?

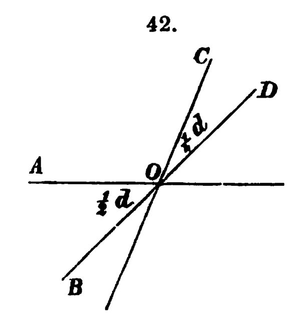
114. Даны смежные неравные углы. Внутри тупаго угла возставить изъ общей вершины перпендикуляръ къ общей сторонѣ смежныхъ угловъ. Чему равна сумма двухъ крайнихъ угловъ?

115. Могутъ ли быть смежные углы оба острыми или тупыми?

116. Каждый изъ смежныхъ угловъ раздѣленъ пополамъ. Какой уголъ образуется между *равнодѣлящими* линіями?

117. Какой величины можетъ быть уголъ, равный своему противоположному?

118. Одинъ изъ четырехъ угловъ при пересѣченіи двухъ прямыхъ линій равенъ 1 ¹/₄d. Найти величину остальныхъ трехъ угловъ.



119. Три прямыя пересѣкаются въ одной точкѣ O (черт. 42) такъ, что ∠AOB = ¹/₂d, а ∠COD = ¹/₄d. Найти величину каждаго изъ остальныхъ угловъ.

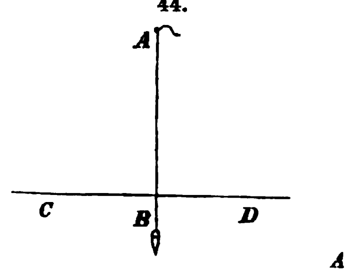
120. Одинъ изъ смежныхъ угловъ въ три раза больше другаго; меньшій изъ нихъ раздѣленъ пополамъ и равнодѣлящая продолжена за вершину. При этомъ вокругъ одной вершины образовалось пять угловъ. Найти величину каждаго изъ нихъ.

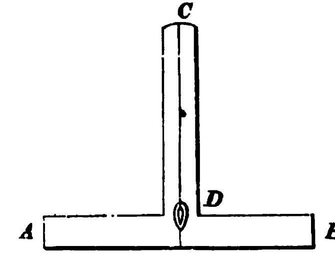
121. Какъ повѣрить столярный наугольникъ? Какъ повѣрить *тс*?

43.

122. Къ одному концу нитки привяжемъ грузъ,— получимъ приборъ, называемый *отвѣсомъ* (черт. 43). Нитка отвѣса показываетъ тотъ путь, по которому падаетъ тяжелое тѣло. Нить отвѣса представляетъ намъ прямую линію, называемую *отвѣсной* или *вертикальной* линіей.

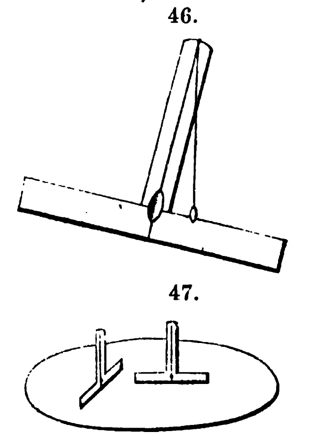
123. Прямая, перпендикулярная къ отвѣсной линіи, называется *горизонтальной* линіей. Если AB ⊥ CD (черт. 44), то CD — линія горизонтальная.





124. Чтобы узнать, горизонтальна ли какая нибудь прямая, употребляютъ приборы, называемые *уровнями*. На чертежѣ 45 показанъ одинъ изъ уровней, называемый *ватерпасомъ*. Это — два деревянныхъ бруска AB и CD, скрѣпленные перпендикулярно одинъ къ другому. Къ бруску CD въ точкѣ C прикрѣпленъ отвѣсъ. Когда брусокъ AB находится въ горизонтальномъ положеніи, то отвѣсъ находится противъ выемки,

сдѣланной въ брускѣ CD; если AB будетъ не въ горизонтальномъ положеніи, то отвѣсъ отклонится отъ выемки (черт. 46).

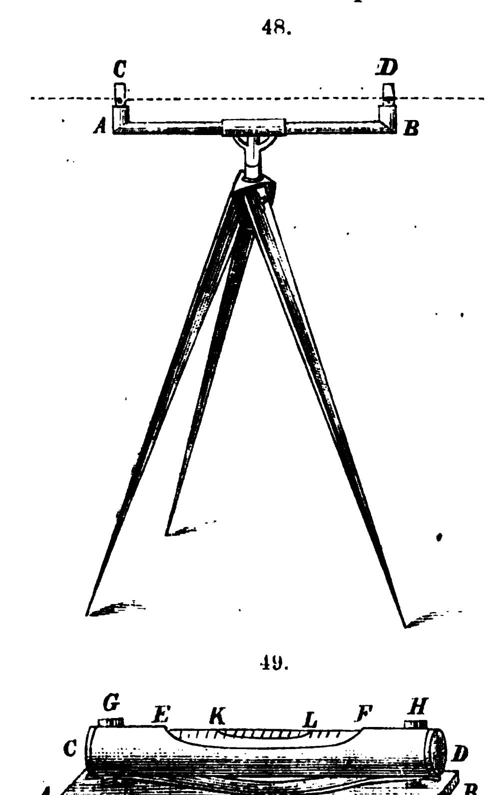


125. Какъ прямыя, такъ и плоскости могутъ занимать вертикальное и горизонтальное положеніе въ пространствѣ.

На всякой плоскости, въ какомъ бы положеніи она ни была, можно найти горизонтальныя прямыя; но чтобы сама плоскость была *горизонтальна,* необходимо, чтобы *произвольно взятыя* на ней прямыя были горизонтальны.

Если хотятъ узнать — горизонтальна данная плоскость или нѣтъ, то устанавливаютъ на ней ватерпасъ въ разныхъ направленіяхъ (черт. 47).

Поверхность стоячей воды (когда она находится въ покоѣ) даетъ намъ понятіе о горизонтальной плоскости.



126. Устроиваютъ водяные уровни; они бываютъ двухъ родовъ: нивеллиры и уровни съ пузырькомъ.

Нивеллиръ — это жестяная или мѣдная трубка AB (черт. 48), загнутая вверхъ съ обоихъ концовъ подъ прямымъ угломъ; въ эти загнутыя части вставлены открытыя стеклянныя трубки C и D съ дѣленіями; въ трубку до нѣкоторой высоты налита окрашенная вода или ртуть; весь приборъ серединою укрѣпленъ на треножникѣ. Поверхность воды въ стеклянныхъ трубкахъ указываетъ горизонтальное направленіе, какъ означено на чертежѣ пунктиромъ.

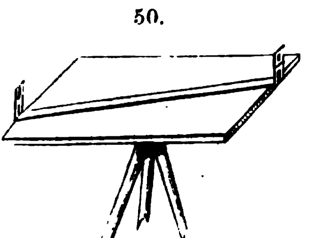
Уровень съ пузырькомъ устроенъ такъ: нѣсколько изогнутая стеклянная трубка въ мѣдной оберткѣ CD лежитъ на мѣдной линейкѣ AB (черт. 49);

въ верхней части мѣдной обертки сдѣланъ вырѣзъ EF, такъ что съ этой стороны стеклянная трубка видна. Въ стеклянную трубку налита жидкость, но такъ, что въ ней остается пузырекъ воздуху. Когда линейка AB приметъ горизонтальное положеніе, пузырекъ будетъ находиться по серединѣ стеклянной трубки въ KL; при малѣйшемъ отклоненіи линейки отъ горизонтальнаго направленія пузырекъ уйдетъ изъ середины въ ту или другую сторону. При помощи винтовъ G и H тотъ или другой конецъ трубки CD можно приблизить къ линейкѣ AB или удалить отъ нея. Этимъ пользуются, когда вывѣряютъ уровень.

---

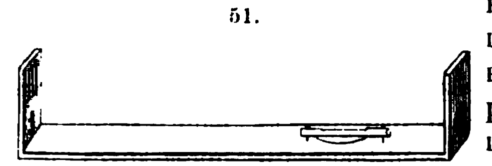
127. Прямыя, провѣшенныя въ полѣ, могутъ составлять углы, которые часто приходится переносить на бумагу. Для этого существуетъ особый приборъ, называемый *мензулой*. Мензула состоитъ изъ доски, на которую наклеенъ листъ бумаги; доска поддерживается треножникомъ (черт. 50), на которомъ можетъ поворачиваться, оставаясь горизонтальною.

50.



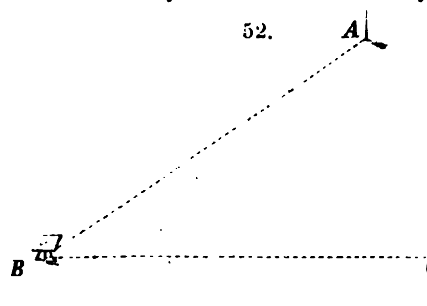
На этотъ столикъ ставится мѣдная линейка особаго устройства. Къ обоимъ концамъ этой линейки (ее называютъ *алидадой*) придѣланы дощечки, называемыя *діоптрами*. Въ каждомъ діоптрѣ прорѣзаны двѣ щелки: одна изъ нихъ очень узкая, а посреди второй, которая пошире, натянута тонкая нить (черт. 51). Узкая щель и щель съ волоскомъ расположены на діоптрахъ въ обратномъ порядкѣ, такъ что противъ узкой щели одного діоптра находится щель съ волоскомъ другаго.

51.



Для снятія угла ABC (черт. 52) надо установить мензулу горизонтально надъ вершиной угла B и вколоть въ бумагу надъ точкой B иглу; далѣе приложить край линейки (алидады) къ иглѣ и установить алидаду такъ, чтобы въ узкое отверстіе одного діоптра были видны волосокъ другаго діоптра и вѣха A; тогда по краю линейки провести прямую. Затѣмъ, не отодвигая края линейки отъ иглы, нужно повернуть алидаду на вѣху C и провести другую прямую. Такимъ образомъ на бумагѣ мы получимъ уголъ ABC.

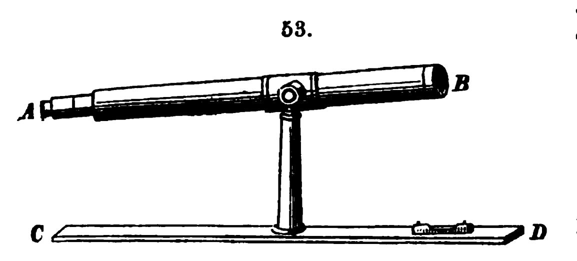
52.



При помощи мензулы съ алидадой можно перенести уголъ съ чертежа на землю.

128. Если требуется наводить алидаду на весьма отдаленные предметы или вѣхи, то употребляется вмѣсто діоптровъ алидады зрительная (астрономическая) труба. Въ трубѣ имѣется кольцо, къ которому прикрѣплены крестообразно два тоненькихъ волоска; пересѣченіе этихъ волосковъ и наводится на наблюдаемый предметъ, причемъ вмѣстѣ съ трубой АВ (черт. 53) поворачивается и линейка CD, къ которой труба прикрѣплена. Приборъ этотъ называется *кипрѣгелемъ*.

53.



129. Для проведенія на землѣ перпендикулярныхъ прямыхъ употребляютъ *эккеръ*. Онъ состоитъ изъ палки съ острымъ концомъ, къ этой палкѣ прикрѣплены двѣ дощечки, перпендикулярныя одна къ другой (черт. 54). На дощечкахъ проведены двѣ перпендикулярныя прямыя, и на концахъ ихъ воткнуты шпильки. Если надо провести перпендикуляръ изъ точки, взятой на провѣшенной прямой линіи, нужно установить въ этой точкѣ эккеръ такъ, чтобы его палка приняла вертикальное положеніе и чтобы пара шпилекъ одной линейки находилась въ направленіи вѣхъ нашей прямой (черт. 55); тогда другая пара шпилекъ укажетъ направленіе перпендикуляра, который можно провѣшить.

54.



Чтобы провѣрить эккеръ, нужно при помощи его провѣшить перпендикуляръ, какъ было показано, потомъ повернуть эккеръ такъ, чтобы вторая пара шпилекъ стала на мѣсто первой, и посмотрѣть, указываетъ ли первая пара направленіе провѣшеннаго перпендикуляра; если да — то эккеръ вѣренъ.

55.

130. Эккеры бываютъ другаго устройства. На чертежѣ 56 представленъ эккеръ, состоящій изъ мѣднаго цилиндра, насаженнаго на палку. Въ цилиндрѣ сдѣланы прорѣзы, какіе мы видѣли въ діоптрахъ. Прорѣзы расположены такъ же, какъ шпильки на описанномъ уже эккерѣ.

56.

На чертежѣ 57 представленъ восьмиугольный эккеръ. При помощи этого эккера можно строить не только прямые углы, но и половины прямыхъ угловъ.

57.

Упражненія. 131. Привести примѣры линій и плоскостей вертикальныхъ и горизонтальныхъ.

132. На чемъ основана повѣрка эккера?

133. Какъ можно провѣшить перпендикуляръ къ прямой, за неимѣніемъ эккера, при помощи мензулы, линейки съ діоптрами и чертежнаго треугольника?

134. На чемъ основано устройство уровня съ пузырькомъ и нивеллира?

135. При кладкѣ фундамента для дома, какимъ инструментомъ нужно пользоваться, чтобы поверхность фундамента была горизонтальна?

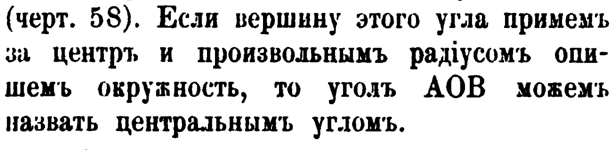
136. Какъ можетъ плотникъ удостовѣриться въ томъ, что какой нибудь брусъ положенъ горизонтально?

137. Какъ повѣрить, правильно ли лежитъ трубка уровня съ пузырькомъ на своей подставкѣ?

138. На наклонной плоскости указать линіи горизонтальныя. Указать горизонтальныя линіи на горизонтальной плоскости.

Измѣреніе угловъ.

139. Всякій уголъ, вершина котораго лежитъ въ центрѣ какого нибудь круга, называется *центральнымъ*. Напр. данъ уголъ AOB (черт. 58). Если вершину этого угла примемъ за центръ и произвольнымъ радіусомъ опишемъ окружность, то уголъ AOB можемъ назвать центральнымъ угломъ.

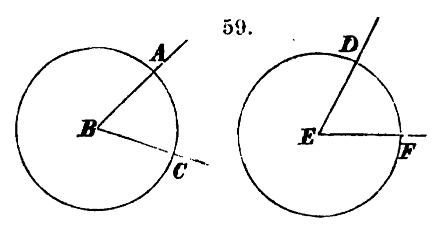


58.

Всякому центральному углу соотвѣтствуетъ дуга, заключенная между его сторонами. Углу AOB соотвѣтствуетъ дуга AB.

140. *Теорема. Въ кругѣ или въ равныхъ кругахъ равнымъ центральнымъ угламъ соотвѣтствуютъ равныя дуги.*

Пусть будутъ равные углы ABC и DEF и изъ ихъ вершинъ, какъ изъ центровъ, описаны окружности однимъ радіусомъ (черт. 59). Надо доказать, что дуга AC равна дугѣ DF.



Дано: $\angle ABC = \angle DEF$
Треб. док. $\smile AC = \smile DF$.

Наложимъ уголъ DEF вмѣстѣ съ окружностью на уголъ ABC такъ, чтобы вершина E упала въ B и сторона EF пошла по BC. Тогда точка F совпадетъ съ C, потому-что EF и BC — равные радіусы, сторона ED пойдетъ по сторонѣ BA по равенству угловъ DEF и ABC, и точка D совпадетъ съ A, такъ какъ ED и BA тоже равные радіусы. Выходитъ, что концы дугъ совпадаютъ. Кромѣ того всѣ точки дуги DF должны лежать на дугѣ AC, иначе бы не всѣ радіусы нашихъ круговъ были равны. Значитъ, дуги совпадаютъ и слѣдовательно равны между собой.

141. *Слѣдствіе. Прямому углу соотвѣтствуетъ дуга, равная одной четверти окружности, описанной какимъ угодно радіусомъ.* Въ самомъ дѣлѣ, если въ кругѣ провести два перпендикулярныхъ діаметра, то получимъ четыре прямыхъ центральныхъ угла; при этомъ окружность должна раздѣлиться на четыре равныя дуги, потому что при центрѣ будетъ четыре равныхъ угла.

142. *Теорема* (обратная). *Въ кругѣ или въ равныхъ кругахъ равнымъ дугамъ соотвѣтствуютъ равные центральные углы.*

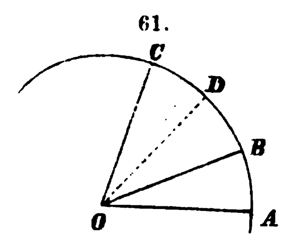
60.

Дано: $\smile AB = \smile CD$
Треб. док. $\angle AOB = \angle COD$.

Пусть въ одномъ кругѣ (черт. 60) дуга AB равна дугѣ CD. Докажемъ, что уголъ AOB равенъ углу COD. Будемъ вращать уголъ COD около центра къ углу AOB до тѣхъ поръ, пока радіусъ OC пойдетъ по OA. Тогда точка C упадетъ въ A по равенству радіусовъ, и дуга CD непремѣнно пойдетъ по дугѣ AB, потому что, если бы эти дуги разошлись, то не всѣ радіусы въ окружности были бы одинаковы, чего конечно не можетъ быть; далѣе, вслѣдствіе равенства дугъ, точка D упадетъ въ B и потому радіусъ OD совмѣстится съ OB. Стало быть, стороны угловъ совпадаютъ и потому углы равны между собой.

143. *Слѣдствіе. Дугѣ, равной одной четверти окружности, соотвѣтствуетъ прямой центральный уголъ.* Это потому, что сумма всѣхъ центральныхъ угловъ равна четыремъ прямымъ (§ 103), а такъ какъ угловъ будетъ четыре и всѣ равные (ибо дуги равны), то каждый равенъ прямому.

144. *Теорема. Во сколько разъ будетъ увеличена дуга, во столько же разъ увеличится и центральный уголъ ей соотвѣтствующій.*



61.

Пусть будетъ дуга AB (черт. 61), которая, увеличенная въ три раза, составитъ дугу AC.

Надо доказать, что уголъ COA, соотвѣтствующій дугѣ AC, въ три раза больше угла BOA, который соотвѣтствуетъ дугѣ AB. Раздѣливъ дугу AC на части, равныя дугѣ AB, проведемъ прямую OD. Тогда увидимъ, что ∠ COA равенъ суммѣ угловъ COD, DOB и BOA; такъ какъ эти углы соотвѣтствуютъ равнымъ дугамъ, то они должны быть одинаковы, а потому вмѣсто угловъ COD и DOB можно подставить уголъ BOA и получимъ, что ∠ COA = 3 ∠ BOA, т. е. уголъ COA въ три раза больше угла BOA. Доказанное предложеніе можно выразить такъ: *сколько разъ дуга одного центральнаго угла содержитъ въ себѣ дугу другаго, столько же разъ первый центральный уголъ содержитъ въ себѣ второй.*

---

145. *Измѣрить уголъ—значитъ узнать, сколько разъ онъ содержитъ въ себѣ другой уголъ, принятый за единицу.*

Но мы знаемъ, что сколько разъ дуга одного угла содержится въ дугѣ другаго, столько же разъ и первый уголъ содержится во второмъ. Поэтому измѣреніе угла замѣняютъ измѣреніемъ его дуги и говорятъ, что *уголъ измѣряется дугой, заключенной между его сторонами и описанной изъ его вершины, какъ изъ центра.*

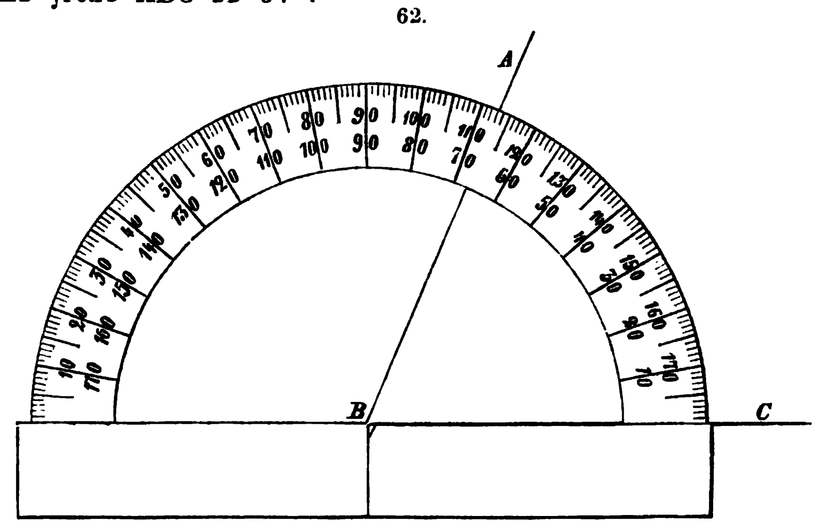
146. Всякая окружность раздѣляется на 360 равныхъ дугъ, называемыхъ *градусами*, каждый градусъ дѣлится на 60 минутъ и каждая минута на 60 секундъ. Слово градусъ обозначается — ^{0}, минута — $'$, секунда — $''$.

147. Изъ предъидущаго (§ 141) слѣдуетъ, что прямому углу всегда соотвѣтствуетъ дуга въ 90^{0}, половинѣ прямаго угла — дуга въ 45^{0}. Наоборотъ: всякой дугѣ въ 90^{0} (§ 143) соотвѣтствуетъ прямой уголъ (при ея центрѣ), дугѣ въ 30^{0} — треть прямаго угла (§ 144) и т. д.

Когда надо измѣрить уголъ, нужно только сосчитать число градусовъ въ его дугѣ. По этому числу можно опредѣлить, какой части прямаго равенъ данный уголъ; напр., если дуга 60^{0}, то уголъ равенъ $^{2}/_{3}$d, если дуга въ 45^{0}, то уголъ равенъ $^{1}/_{2}$d; но обыкновенно говорятъ просто: уголъ въ 60^{0}, уголъ въ 45^{0} и т. д.

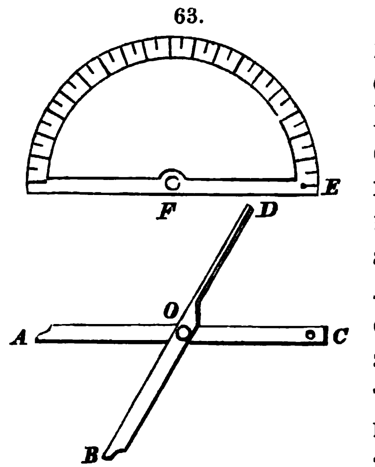
148. Число градусовъ начерченнаго угла узнается при помощи особаго прибора — *транспортира*. Это мѣдный полукругъ (черт. 62), раздѣленный на градусы; счетъ градусовъ идетъ обыкновенно съ той и съ другой стороны полукруга. Чтобы измѣрить данный уголъ, напр. ∠ ABC, надо приложить транспортиръ центромъ къ вершинѣ угла и діаметръ его направить по сторонѣ угла, потомъ посмотрѣть, сколько градусовъ въ дугѣ транспортира между сторонами угла. Нашъ уголъ ABC въ 67°.

62.



Понятно, что при помощи транспортира можно построить уголъ въ данное число градусовъ.

63.



Для измѣренія угловъ, встрѣчающихся на предметахъ, употребляется особый транспортиръ съ малкой (черт. 63). На трансцортирѣ имѣется круглое отверстіе F и шпенекъ E. Съ нижней стороны малки подъ винтикомъ O есть шпенекъ, который плотно входитъ въ отверстіе F, а на одной изъ линеекъ малки сдѣлано отверстіе C, которое плотно охватываетъ шпенекъ E. Такимъ образомъ малку можно надѣть на транспортиръ. Когда хотятъ измѣрить уголъ, прикладываютъ къ его сторонамъ малку такъ, чтобы она охватывала уголъ частями линеекъ OA и OB, затѣмъ, закрѣпивъ малку винтикомъ O, надѣваютъ ее на транспортиръ и отсчитываютъ градусы между OD и OC.

149. Для измѣренія угловъ въ полѣ служитъ приборъ, называемый *астролябіей или графометромъ.* Онъ состоитъ изъ мѣднаго полукруга или круга, *лимба*, раздѣленнаго на градусы и полуградусы. Лимбъ поддерживается треножной подставкой такъ, что можетъ быть приведенъ въ горизонтальное положеніе и поворачиваться въ горизонтальной плоскости. Къ лимбу придѣланы двѣ алидады; одна изъ нихъ прикрѣплена неподвижно, т. е. такъ, что можетъ поворачиваться только вмѣстѣ съ лимбомъ, а другая вращается около оси, помѣщенной въ центрѣ лимба. Отъ неподвижной алидады идетъ счетъ градусовъ отъ 0° до 180°. Если приборъ съ цѣлымъ кругомъ (черт. 64), то градусы обозначены такъ: отъ одного конца діаметра идутъ числа 0, 10, 20 и т. д. до 170, и отъ противоположнаго конца діаметра по другой половинѣ круга счетъ идетъ снова отъ 0°. Въ той точкѣ, гдѣ 0°, будетъ и 180°.

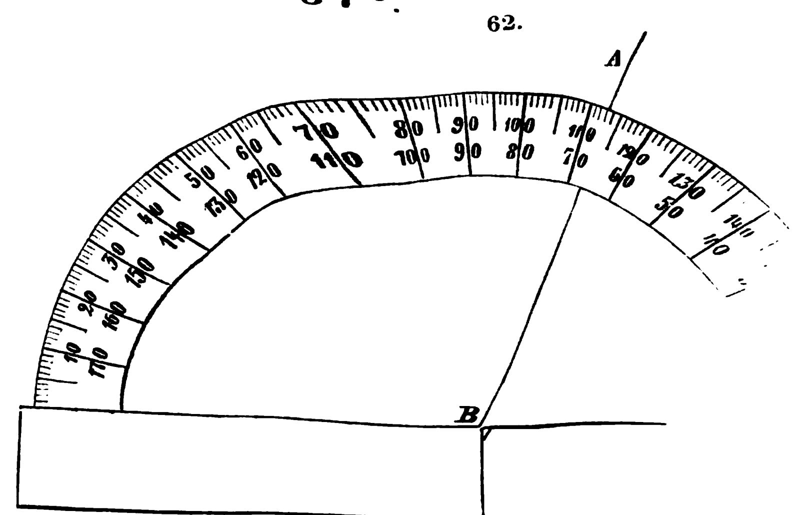
64.

Для опредѣленія числа градусовъ угла, означеннаго вѣхами, устанавливаютъ астролябію такъ, чтобы центръ лимба былъ надъ вершиной угла, и приводятъ лимбъ въ горизонтальное положеніе; затѣмъ поворачиваютъ лимбъ до тѣхъ поръ, пока черезъ прорѣзы діоптровъ неподвижной алидады увидятъ вѣху, стоящую на одной сторонѣ угла. Поставивши такимъ образомъ инструментъ и закрѣпивъ лимбъ нажимнымъ винтомъ, который имѣется внизу, направляютъ подвижную алидаду на вѣху, поставленную на другой сторонѣ угла, и наконецъ находятъ по дѣленіямъ лимба число градусовъ угла между двумя алидадами. Это и будетъ мѣра даннаго угла.

150. Измѣряемый уголъ можетъ содержать неполное число градусовъ или полуградусовъ. Если не требуется особой точности, то не обращаютъ вниманія на ошибку менѣе полуградуса. Когда же хотятъ измѣрить уголъ болѣе точно, то для опредѣленія минутъ пользуются круговымъ ноніусомъ (*верніеромъ*), который придѣланъ къ подвижной алидадѣ. Дуга верніера равна 29 полуградусамъ; она раздѣлена на 30 частей; слѣдовательно, одно дѣленіе верніера менѣе одного дѣленія лимба на $^{1}/_{30}$ долю полуградуса, или на одну минуту. Начало верніера можетъ находиться на линіи, проходящей черезъ діоптры подвижной алидады.

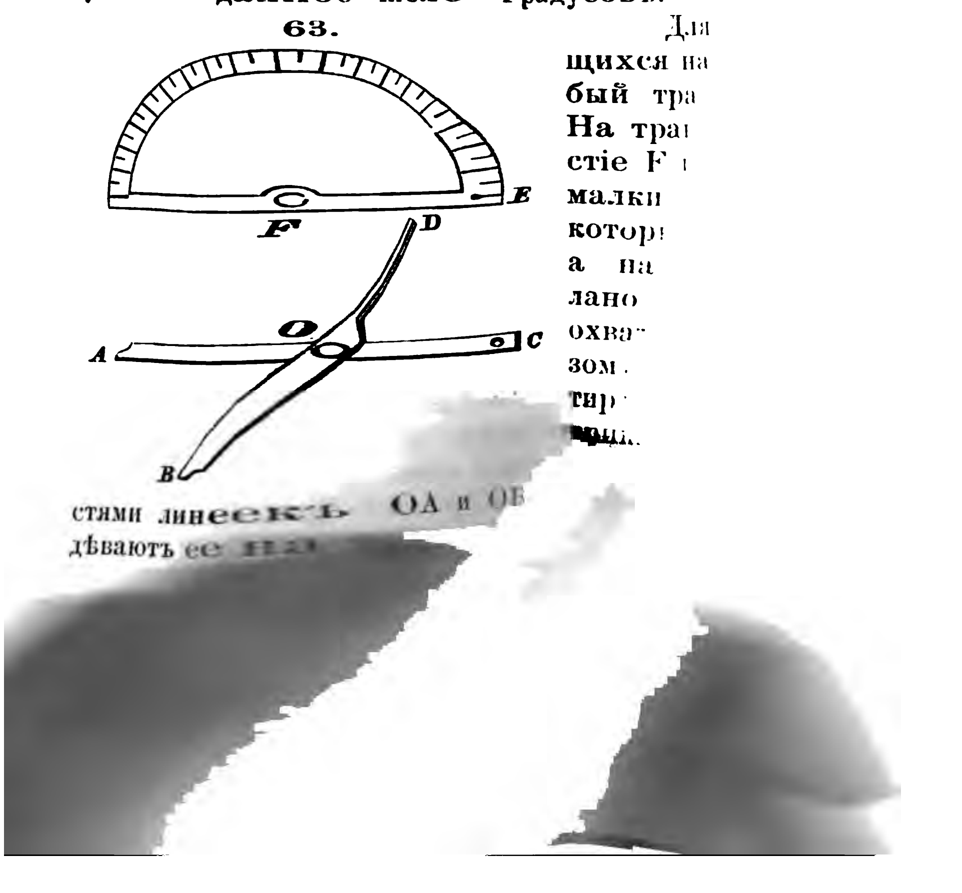
148. Число градусовъ начерченнаго угла узнается при по… особаго прибора — *транспортира*. Это мѣдный полукругъ (черт… раздѣленный на градусы; счетъ градусовъ идетъ обыкновенно съ … съ другой стороны полукруга. Чтобы измѣрить данный уголъ ∠ ABC, надо приложить транспортиръ центромъ къ вершин… и діаметръ его направить по сторонѣ угла, потомъ пос… сколько градусовъ въ дугѣ транспортира между сторона… Нашъ уголъ ABC въ 67°.

62.



Понятно, что при помощи тра… уголъ въ данное число градусовъ.

63.



Дл… щихся на… бый тра… На тра… стіе F … малки… котор… а на… лано… охва… зом… тир… …

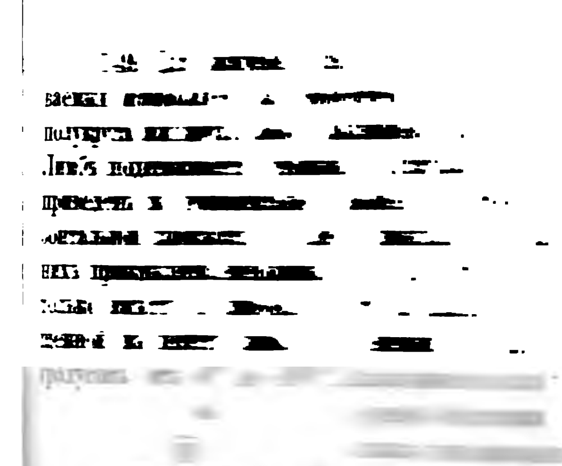
…стями линеекъ OA и OB … дѣваютъ ее на…

равныхъ частей.
ъ одной вершины.
ставить перпенди-
у угла между пер-

ъ 30°, въ 22° 30′,

d каждый, по $^5/_6$d.
и изъ нихъ равны
маго, а пятый на 25°

въ другаго.
экера?
мѣренія угловъ на полѣ,



иг. 66). Если на сторонахъ
сти черезъ нихъ прямую, то
ную со всѣхъ сторонъ тремя

Часть плоскости, ограниченная со всѣхъ сторонъ тремя прямыми, называется треугольникомъ.

Прямыя AB, BC и AC называются *сторонами* или *боками* треугольника, точки A, B и C — его *вершинами*. Противъ каждой стороны треугольника лежитъ уголъ: противъ AC — уголъ ABC, и противъ AB — уголъ BCA.

треугольниковъ дѣлается наложеніе, кото- какъ и наложеніе угловъ. *Треугольники при наложеніи совпадаютъ.*

треугольника равны между собой, то понятно, лежности одинаковы, т. е. каждая сторона ѣетъ равную себѣ въ другомъ треугольникѣ, и ѣетъ себѣ равный въ другомъ. Кромѣ того равныхъ треугольникахъ равные углы лежать —противъ равныхъ угловъ.
угловъ, называются *сход-*

На нашемъ чертежѣ (65) представлена часть лимба AB и часть подвижной алидады CE съ діоптромъ EF и верніеромъ. Положимъ, что дуга лимба, заключенная между сторонами измѣряемаго угла, содержитъ 26° и еще часть полуградуса KD. Начало или нуль верніера въ точкѣ D, между двумя дѣленіями лимба. Ищемъ, которое дѣленіе верніера совпадаетъ съ дѣленіемъ лимба; положимъ, что 19-е въ точкѣ L. Изъ этого находимъ, что часть полуградуса KD составляетъ 19 минутъ, такъ какъ отъ L до K по лимбу 19 дѣленій и отъ L до D по верніеру 19 дѣленій; но если каждое дѣленіе верніера меньше дѣленія лимба на одну минуту, то дуга KD, которая есть разность между дугами LK и LD, должна составить 19 минутъ. Слѣдовательно, измѣряемый уголъ равенъ $26^{\circ} 19'$.

65.

Такъ какъ невозможно требовать, чтобы весь приборъ былъ сдѣланъ вполнѣ точно, то понятно, что при измѣреніи угла можетъ быть ошибка въ двѣ, три минуты. Чтобы ошибка получилась по возможности меньше, дѣлаютъ часто на подвижной алидадѣ верніеры съ обоихъ концовъ. При измѣреніи угла смотрятъ на оба верніера и берутъ среднее между ихъ показаніями. Положимъ, что одинъ верніеръ опредѣляетъ уголъ въ $26^{\circ} 19'$, а по другому верніеру величина того же угла выходитъ въ $26^{\circ} 15'$; тогда величину этого угла полагаютъ въ $26^{\circ} 17'$. Можетъ быть устроено и четыре верніера: по два съ каждаго конца подвижной алидады.

Упражненія. 151. Одинъ градусъ экватора равенъ приблизительно 105 верстамъ. Какой длины весь экваторъ? Какой длины одна минута, секунда этой окружности?

152. Построить произвольный уголъ и измѣрить его транспортиромъ.

153. Построить уголъ въ 15°, въ 80°, въ 100°, въ 135°, въ $\frac{2}{3}d$, въ $1\frac{1}{3}d$.

154. Построить прямой уголъ съ помощью маленькаго транспортира и измѣрить его большимъ транспортиромъ.

155. Выразить въ градусахъ и минутахъ всѣ углы чертежа 42-го.

156. Данъ острый уголъ. Построить уголъ вдвое больше даннаго.

157. Данъ уголъ въ 105°. Раздѣлить его на 3, на 5 равныхъ частей.

158. Построить 3, 4, 5, 6 равныхъ угловъ вокругъ одной вершины.

159. Построить уголъ въ 72°, изъ его вершины возставить перпендикуляры къ сторонамъ (наугольникъ) и опредѣлить величину угла между перпендикулярами.

160. Какую часть прямаго угла составляетъ уголъ въ 30°, въ 22° 30′, въ 36°, въ 144°?

161. Построить углы вокругъ общей вершины по $^2/_3$d каждый, по $^5/_6$d.

162. Вокругъ общей вершины пять угловъ: три изъ нихъ равны между собой. четвертый на 15° градусовъ меньше прямаго, а пятый на 25° больше прямаго. Какой величины каждый уголъ?

163. Сложить два данные угла; вычесть одинъ изъ другаго.

164. Можно ли пользоваться астролябіей вмѣсто эккера?

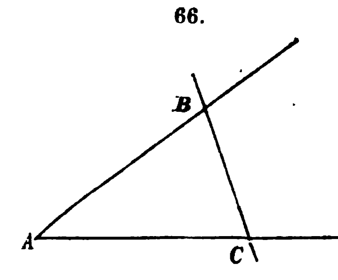
165. Какъ можно устроить приборъ для измѣренія угловъ на полѣ, если не требуется особой точности?

III.

Треугольники.

166. Пусть будетъ уголъ A (черт. 66). Если на сторонахъ этого угла взять по точкѣ B и C и провести черезъ нихъ прямую, то получимъ часть плоскости, ограниченную со всѣхъ сторонъ тремя прямыми линіями.

66.



Часть плоскости, ограниченная со всѣхъ сторонъ тремя прямыми, называется треугольникомъ.

Прямыя AB, BC и AC называются *сторонами* или *боками* треугольника, точки A, B и C — его *вершинами*. Противъ каждой стороны треугольника лежитъ уголъ: противъ AC — уголъ ABC, противъ BC — уголъ BAC и противъ AB — уголъ BCA.

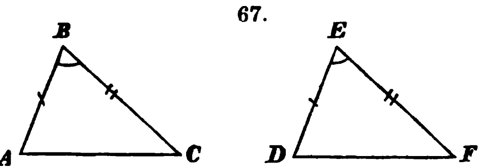
167. Для сравненія треугольниковъ дѣлается наложеніе, которое производится такъ же, какъ и наложеніе угловъ. *Треугольники равны между собой, если при наложеніи совпадаютъ.*

168. Если два треугольника равны между собой, то понятно, что и всѣ ихъ принадлежности одинаковы, т. е. каждая сторона одного треугольника имѣетъ равную себѣ въ другомъ треугольникѣ, и каждый уголъ одного имѣетъ себѣ равный въ другомъ. Кромѣ того нужно замѣтить, что въ равныхъ треугольникахъ равные углы лежатъ противъ равныхъ сторонъ и равныя стороны—противъ равныхъ угловъ.

Стороны, лежащія противъ равныхъ угловъ, называются *сходственными*.

169. *Теорема. Если двѣ стороны и уголъ между ними одного треугольника порознь равны двумъ сторонамъ и углу между ними другаго, то треугольники равны между собой.*

Пусть даны два треугольника ABC и DEF (черт. 67), у которыхъ сторона AB равна DE, сторона BC равна EF и уголъ ABC равенъ DEF. Докажемъ, что эти треугольники должны быть равны.

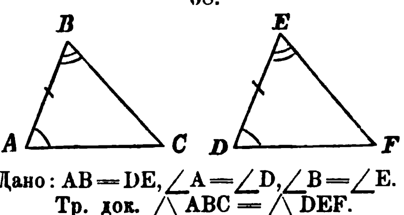


Дано: AB = DE, BC = EF, ∠ ABC = ∠ DEF.
Тр. док. △ ABC = △ DEF.

Представимъ себѣ, что мы беремъ треугольникъ DEF и накладываемъ на ABC такъ, чтобы вершина E упала въ B, сторона ED пошла бы по BA и чтобы оба треугольника лежали по одну сторону BA. Посмотримъ теперь, гдѣ будутъ находиться остальныя принадлежности треугольника DEF. Вершина D должна упасть въ A, потому что намъ извѣстно, что DE равна AB; по причинѣ равенства угловъ E и B сторона EF должна пойти по BC; а по равенству сторонъ EF и BC, вершина F должна упасть въ C. Если же точка D лежитъ въ A, а F — въ C, то прямая DF должна совпадать съ AC. И такъ мы видимъ, что данные треугольники при наложеніи должны совпасть, а это и значитъ, что они равны между собой.

170. *Теорема. Если одна сторона и два угла при ней одного треугольника равны порознь сторонѣ и двумъ угламъ при ней другаго треугольника, то треугольники равны между собой.*

Даны два треугольника ABC и DEF (черт. 68), у которыхъ сторона AB равна DE, уголъ A равенъ D и уголъ B равенъ E. Надо доказать, что эти треугольники равны между собой.

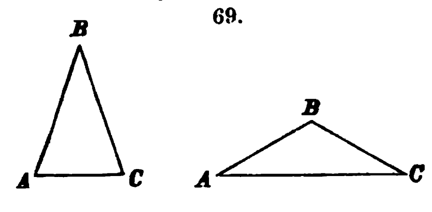


Дано: AB = DE, ∠A = ∠D, ∠B = ∠E.
Тр. док. △ ABC = △ DEF.

Представимъ себѣ, что мы беремъ △ DEF и накладываемъ на △ ABC такъ, чтобы вершина D упала въ A, сторона DE пошла по AB и чтобы оба треугольника лежали по одну сторону AB. Посмотримъ, гдѣ будутъ находиться остальныя принадлежности треугольника DEF. По причинѣ равенства сторонъ DE и AB вершина E должна упасть въ B; по равенству угловъ A и D сторона DF должна пойти по AC и потому вершина F будетъ лежать гдѣ нибудь на прямой AC или на ея продолженіи; по равенству угловъ B и E сторона EF должна пойти по BC и потому вершина F ляжетъ гдѣ нибудь на прямой BC или на ея продолженіи. Выходитъ, что одна и та же вершина F должна находиться на

двухъ прямыхъ: на AC и на BC,—это значитъ, что она будетъ лежать на пересѣченіи этихъ прямыхъ, т. е. въ вершинѣ C. Итакъ, мы видимъ, что данные треугольники при наложеніи должны совпасть; слѣдовательно, они равны между собой.

171. Треугольникъ, въ которомъ двѣ стороны равны между собой, называется *равнобедреннымъ*. Если напр. у треугольника ABC (черт. 69) стороны AB и BC равны, то онъ равнобедренный. Третья сторона AC называется *основаніемъ*, а вершина противолежащаго угла B—*вершиной* равнобедреннаго треугольника.



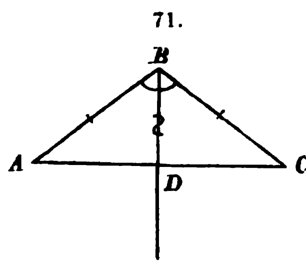
69.

70.

172. Треугольникъ въ которомъ всѣ три стороны равны между собой (черт. 70), называется *равностороннимъ*. Равносторонній треугольникъ можно разсматривать какъ равнобедренный, принимая за основаніе любую его сторону.

173. *Теорема. Прямая, раздѣляющая пополамъ уголъ при вершинѣ равнобедреннаго треугольника, дѣлитъ весь треугольникъ на два равныхъ треугольника.*

71.



Дано: AB = BC
∠ABD = ∠DBC.
Треб. док. △ABD = △BDC.

Пусть въ равнобедренномъ треугольникѣ ABC (черт. 71) сторона AB равна BC; положимъ, что въ немъ уголъ при вершинѣ B раздѣленъ пополамъ линіей BD, т. е. что ∠ABD = ∠DBC.

Докажемъ, что равнобедренный треугольникъ линіей BD дѣлится на два равныхъ треугольника ABD и BDC.

Разсмотримъ принадлежности полученныхъ треугольниковъ: сторона AB изъ лѣваго треугольника равна по данному условію сторонѣ BC изъ праваго, сторона BD изъ лѣваго треугольника принадлежитъ также и правому (общая), уголъ ABD изъ лѣваго треугольника равенъ углу DBC изъ праваго. Выходитъ, что двѣ стороны и уголъ между ними лѣваго треугольника равны двумъ сторонамъ и углу праваго; а потому (§ 169) лѣвый треугольникъ ABD долженъ быть равенъ правому BDC.

174. *Слѣдствіе 1. Прямая, раздѣляющая пополамъ уголъ при вершинѣ равнобедреннаго треугольника, дѣлитъ пополамъ его основаніе.* Изъ равенства треугольниковъ ABD и BDC слѣдуетъ (§ 168), что AD = DC.

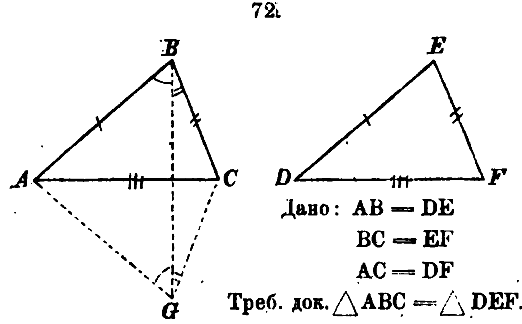
175. *Слѣдствіе* 2. *Прямая, раздѣляющая пополамъ уголъ при вершинѣ равнобедреннаго треугольника, перпендикулярна къ его основанію.* Изъ равенства треугольниковъ ABD и BDC слѣдуетъ, что ∠ ADB = ∠ BDC, а такъ какъ это углы смежные, то BD ⊥ AC.

176. *Слѣдствіе* 3. *Углы при основаніи равнобедреннаго треугольника равны между собой.* Изъ равенства треугольниковъ ABD и BDC слѣдуетъ, что ∠ BAD = ∠ BCD.

177. *Слѣдствіе* 4. Всѣ три угла равносторонняго треугольника равны между собой, потому что равносторонній треугольникъ можно разсматривать какъ равнобедренный, принимая за основаніе любую сторону.

178. *Теорема. Если три стороны одного треугольника порознь равны тремъ сторонамъ другого, то треугольники равны между собой.*

Пусть будутъ треугольники ABC и DEF (черт. 72), у которыхъ сторона AB равна DE, сторона BC равна EF и сторона AC = DF. Докажемъ, что эти треугольники должны быть равны между собой.



Перемѣстимъ треугольникъ DEF къ ABC такъ, чтобы вершина D упала въ A, сторона DF направилась по AC, и чтобы треугольники расположились по обѣ стороны AC*).

Тогда вершина F упадетъ въ C, потому что AC равна DF; сторона DE приметъ положеніе AG, а FE — положеніе CG; такимъ образомъ уголъ DEF приметъ положеніе AGC.

Черезъ точки B и G проведемъ прямую BG. Тогда получимъ два новыхъ треугольника GAB и GCB. Треугольникъ GAB равнобедренный, потому что по условію AB равна DE, но DE можно замѣнить AG и выйдетъ, что AB = AG. Извѣстно, что въ равнобедренномъ треугольникѣ углы при основаніи равны между собой (§ 176), а потому уголъ ABG равенъ углу AGB.

Треугольникъ GCB—тоже равнобедренный, потому что BC=EF, а EF = CG, такъ что BC = CG. Стало быть, уголъ CBG равенъ углу CGB. И такъ, мы имѣемъ: ∠ ABG = ∠ AGB и ∠ CBG = ∠ CGB.

---

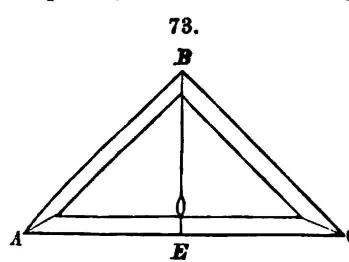
*) Чтобы треугольники находились по обѣ стороны AC, достаточно опрокинуть треугольникъ DEF черезъ сторону DF.

Сложивъ равные углы съ равными, получимъ $\angle$ ABC = $\angle$ AGC, но уголъ AGC можемъ замѣнить угломъ DEF, тогда выйдетъ, что $\angle$ ABC = $\angle$ DEF. Слѣдовательно, въ треугольникахъ ABC и DEF сторона AB = DE, сторона BC = EF и $\angle$ ABC = $\angle$ DEF, а потому они равны между собою (§ 169).

---

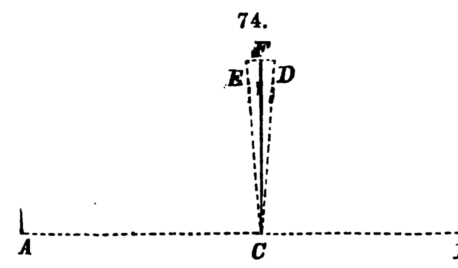
179. Въ строительныхъ работахъ очень часто употребляется ватерпасъ, имѣющій видъ равнобедреннаго треугольника (черт. 73). Онъ сдѣланъ изъ трехъ линеекъ; двѣ изъ нихъ BA и BC равной длины; по серединѣ третьей линейки проведена черта E. Въ точкѣ B прикрѣпленъ отвѣсъ. Когда гирька отвѣса будетъ противъ черты E, то линейка AC будетъ перпендикулярна къ отвѣсу BE, потому что треугольники ABE и BEC, имѣющіе по три равныя стороны, будутъ равны и, слѣдовательно, уголъ BEA будетъ равенъ углу BEC. Если же прямая AC перпендикулярна къ отвѣсной, то она горизонтальна. Значитъ, когда гирька отвѣса находится противъ черты нижней линейки, то эта линейка имѣетъ горизонтальное положеніе.

73.



180. Если мы имѣемъ невѣрный эккеръ, и требуется провѣшить перпендикуляръ къ означенной на землѣ прямой изъ данной на ней точки, то можно поступить слѣдующимъ образомъ: установить эккеръ въ данной точкѣ C (черт. 74) такъ, чтобы діоптры были направлены по данной прямой AB, а по направленію другихъ діоптровъ поставить колъ D; повернутъ затѣмъ эккеръ на четверть окружности (какъ это дѣлается для провѣрки его), чтобы вторые діоптры были въ направленіи прямой AB, по указанію же другихъ діоптровъ поставить колъ E на томъ же разстояніи отъ C, на какомъ былъ поставленъ колъ D; если теперь между кольями E и D поставить посерединѣ колъ F, то прямая CF и будетъ перпендикулярна къ AB.

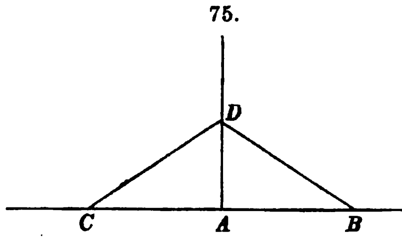
74.



Въ самомъ дѣлѣ, $\triangle$ CDF = $\triangle$ CEF (§ 178) и потому $\angle$FCD = $\angle$FCE, углы же DCB и ECA также равны, такъ какъ при поворотѣ эккера уголъ DCB приметъ положеніе угла ECA, или же уголъ, противоположный углу DCB, займетъ мѣсто угла ECA. Стало

быть, когда сложимъ равные углы съ равными, получимъ, что $\angle$ FCB = $\angle$ FCA или CF $\perp$ AB.

181. Можно провѣшить перпендикуляръ къ данной прямой изъ точки A (черт. 75) и не имѣя эккера. Отъ точки A отмѣримъ равныя разстоянія AB и AC; утвердивъ въ точкахъ B и C концы веревки или цѣпи, отводимъ ее въ сторону отъ BC и, натягивая веревку, отмѣчаемъ ея середину коломъ D. Прямая AD и будетъ перпендикулярна BC.



Треугольники ABD и ACD равны между собой (§ 178), а потому и $\angle$ DAB = $\angle$ DAC или AD $\perp$ BC.

Упражненія. 182. Какъ дѣлается наложеніе одного треугольника на другой?

Что въ этомъ случаѣ зависитъ отъ насъ и что не зависитъ?

183. Построить равнобедренный треугольникъ (циркуль и линейка).

184. Построить равносторонній треугольникъ на данной сторонѣ (циркуль и линейка).

185. Построить разносторонній треугольникъ по даннымъ сторонамъ.

186. Построить равнобедренный треугольникъ по основанію и боковой сторонѣ (циркуль и линейка).

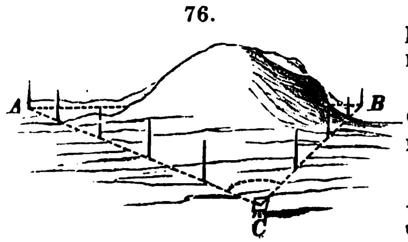
187. Построить равнобедренный треугольникъ съ прямымъ угломъ при вершинѣ (треугольникъ, циркуль и линейка).

188. Построить треугольникъ, котораго одна сторона 3, другая 4, а третья 5 дюймовъ (циркуль и линейка).

189. Построить треугольники, которыхъ стороны 2, 3 и 6 дюймовъ и 2, 3 и 5 дюймовъ.

190. Въ равнобедренномъ треугольникѣ равныя стороны по 5 дюймовъ. Какой величины можетъ быть третья сторона?

191. Одна сторона треугольника 4, а другая 9 дюймовъ. Какой величины можетъ быть третья сторона?



192. Построить треугольникъ, равный данному, съ помощью транспортира и безъ его помощи.

193. Измѣрить разстояніе на землѣ отъ одной точки до другой, когда между ними есть препятствіе.

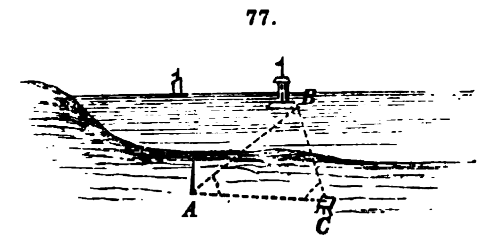
Положимъ, надо измѣрить разстояніе AB (черт. 76), когда между точками A и B есть холмъ.

Выберемъ точку С такъ, чтобы отъ нея можно было провѣшить прямыя къ А и къ В.

Тогда длина АВ и прямыя СА и СВ образуютъ треугольникъ АВС. Можно теперь измѣрить цѣпью линіи СА и СВ, а уголъ С снять мензулой или измѣрить графометромъ. Выбравъ затѣмъ плоское мѣсто, можно построить уголъ, равный С, и на его сторонахъ отмѣрить столько саженъ, сколько было въ сторонахъ СА и СВ, вбить въ концахъ этихъ линій вѣхи и между ними провѣшить прямую. Эта прямая должна быть равна АВ. Почему?

194. Измѣрить разстояніе между двумя точками, когда одна изъ нихъ недоступна.

77.



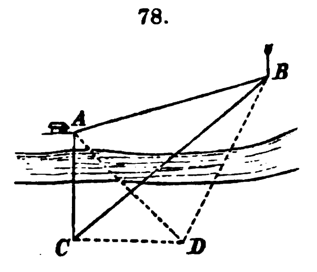
Положимъ, надо измѣрить разстояніе между А и В (черт. 77), когда точка В недоступна.

Отъ точки А отмѣримъ какое нибудь разстояніе АС и измѣримъ углы А и С, которые образуются между линіей АС и направленіями АВ и СВ. Затѣмъ гдѣ нибудь провѣшимъ прямую, отмѣримъ на ней разстояніе, равное АС, и на концахъ строимъ углы, равные угламъ А и С.

Тогда прямая, лежащая противъ угла, равнаго С, будетъ равна АВ. Почему?

195. Измѣрить разстояніе между двумя недоступными точками.

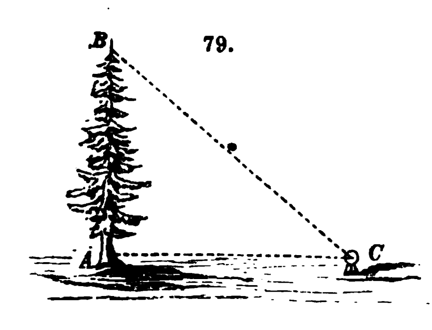
78.



Точки А и В (черт. 78), между которыми надо измѣрить разстояніе, находятся за рѣкой. Задача приводится къ построенію двухъ треугольниковъ, равныхъ CAD и CBD. Тогда получится и треугольникъ, равный АСВ, котораго сторону, соотвѣтствующую АВ, можно измѣрить.

196. Измѣрить высоту предмета, не достигая его вершины.

79.

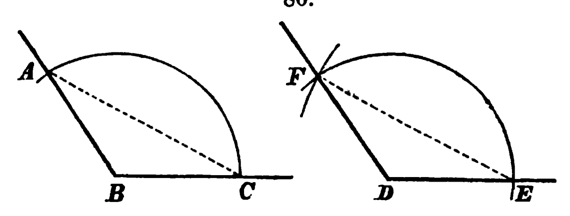


Треугольникъ АВС (черт. 79), лежащій въ вертикальной плоскости, можно нанести на плоскость горизонтальную. Въ треугольникѣ АВС можно измѣрить сторону АС и уголъ С, а уголъ А — прямой.

197. Построить уголъ, равный данному углу АВС (циркуль и линейка).

Построеніе. Проведемъ произвольную прямую (черт. 80) и возьмемъ на ней точку D. Вершину даннаго угла B примемъ за центръ и произвольнымъ радіусомъ опишемъ окружность, которая пересѣчетъ стороны даннаго угла въ точкахъ A и C; тѣмъ же радіусомъ опишемъ дугу, принявъ точку D за центръ; эта дуга пересѣчетъ произвольную прямую въ какой нибудь точкѣ E. Принявъ за радіусъ разстояніе CA, а точку E за центръ, опишемъ дугу; черезъ точку пересѣченія дугъ F и точку D проведемъ прямую. Полученный такимъ образомъ уголъ FDE равенъ углу ABC.

80.



Доказательство. Проведя прямыя AC и FE, получимъ треугольники ABC и FDE, которые равны между собой, потому что AB=FD, BC=DE, какъ радіусы равныхъ окружностей, а AC=FE, такъ какъ FE есть радіусъ, равный разстоянію AC. Изъ равенства треугольниковъ слѣдуетъ, что $\angle ABC = \angle FDE$.

198. Построить равнобедренный треугольникъ, когда даны уголъ при вершинѣ и одна изъ равныхъ сторонъ (цирк. и лин.).

199. Построить треугольникъ по данной сторонѣ и двумъ даннымъ угламъ (черт. 81; цирк. и лин.).

81. 82.

200. Построить треугольникъ по даннымъ двумъ сторонамъ и углу между ними (черт. 82; цирк. и лин.).

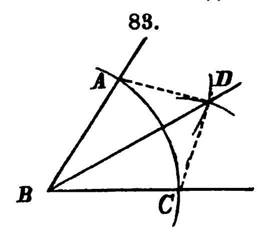
201. Построить равнобедренный треугольникъ, когда даны одна изъ равныхъ сторонъ и уголъ при основаніи.

202. Построить сумму и разность двухъ данныхъ угловъ (цирк. и лин.).

203. Построить сумму всѣхъ трехъ угловъ какого нибудь треугольника (цирк. и лин.).

204. Раздѣлить уголъ ABC (черт. 83) пополамъ (цирк. и лин.).

83.



Построеніе. Вершину B примемъ за центръ и произвольнымъ радіусомъ опишемъ дугу. Возьмемъ радіусъ болѣе половины разстоянія между A и C и, принимая эти точки за центры, опишемъ дуги. Черезъ точку пересѣченія этихъ дугъ D и вершину B проведемъ прямую; эта прямая и раздѣлитъ данный уголъ пополамъ.

Доказательство. Проведя прямыя AD и CD, получимъ треугольники BAD и DBC, которые равны между собой, потому что BA=BC, AD=CD и сторона BD общая. Изъ равенства треугольниковъ слѣдуетъ, что $\angle$ ABD = $\angle$ DBC.

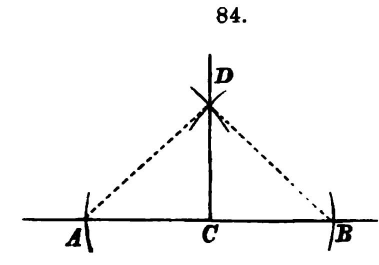
205. Раздѣлить данный уголъ на четыре равныя части.

206. Въ данномъ треугольникѣ раздѣлить всѣ три угла пополамъ.

207. Внутри равносторонняго треугольника найти такую точку, чтобы прямыя, проведенныя отъ нея ко всѣмъ вершинамъ, раздѣлили бы треугольникъ на три равныя части.

208. Дана сумма и разность двухъ угловъ. Построить эти углы (§§ 197 и 204).

84.



209. Изъ точки C, взятой на прямой AB (черт. 84), возставить перпендикуляръ къ этой прямой (цирк. и лин.).

Построеніе. Принявъ точку C за центръ, опишемъ произвольнымъ радіусомъ окружность, которая пересѣчетъ данную прямую въ двухъ точкахъ A и B. Изъ этихъ точекъ, какъ изъ центровъ, равными радіусами болѣе AC, опишемъ дуги, которыя пересѣкутся въ какой нибудь точкѣ D. Проведя прямую черезъ точки D и C, получимъ искомый перпендикуляръ DC.

Доказательство. Проведемъ прямыя AD и BD. Въ треугольникахъ ADC и CDB сторона CD общая, CA=CB, какъ радіусы одной окружности, и AD=BD, какъ радіусы двухъ равныхъ круговъ. Поэтому $\triangle$ADC = $\triangle$CDB; значитъ, $\angle$ACD = $\angle$DCB и, слѣдовательно, DC $\perp$ AB.

85.

210. Построить равнобедренный треугольникъ по данному углу при вершинѣ и по прямой *), раздѣляющей этотъ уголъ пополамъ (черт. 85; цирк. и лин.).

86.

211. Построить углы въ 90°, 45° и 135° безъ помощи транспортира.

212. Построить треугольникъ на данной сторонѣ такъ, чтобы одинъ уголъ около этой стороны былъ прямой, а другой въ 45° (цирк. и лин.).

213. Данную прямую AB (черт. 86) раздѣлить пополамъ (цирк. и лин.).

Построеніе. Принимая точки A и B за центры, описываемъ окружности равными радіусами болѣе половины данной пря-

*) Длину прямой считать отъ вершины до основанія треугольника.

мой. Окружности пересѣкутся въ точкахъ C и D, черезъ которыя проведемъ прямую. Прямая CD и раздѣлитъ данную прямую AB въ точкѣ E пополамъ.

Доказательство. Проведемъ прямыя отъ A и B къ точкамъ C и D. Треугольники DAC и CBD равны, потому что $AC = BC$, $AD = BD$ и CD — общая. Изъ равенства этихъ треугольниковъ слѣдуетъ, что $\angle ACE = \angle ECB$. Такъ какъ $\triangle ACB$ — равнобедренный, и CE дѣлитъ уголъ при его вершинѣ пополамъ, то и $AE = EB$ (§ 174).

Кстати замѣтимъ, что $CE \perp AB$ (§ 175). Такимъ образомъ, указаннымъ построеніемъ мы черезъ середину данной прямой проводимъ къ ней перпендикуляръ.

214. **Раздѣлить данную прямую на четыре равныя части.**

215. **На данной прямой, какъ на діаметрѣ, построить кругъ (цирк. и лин.).**

216. **Въ кругѣ провести нѣсколько хордъ и изъ середины каждой возставить къ ней перпендикуляръ.**

217. **Провести въ треугольникѣ прямыя черезъ вершины и середины противолежащихъ сторонъ.**

218. **Изъ середины каждой стороны треугольника возставить къ ней перпендикуляръ.**

219. **Построить равнобедренный треугольникъ по даннымъ основанію и прямой, раздѣляющей уголъ при вершинѣ пополамъ.**

220. **Описать двѣ окружности такъ, чтобы разстояніе между ихъ центрами было равно суммѣ данныхъ радіусовъ и возставить перпендикуляръ къ прямой, проведенной черезъ центры изъ общей точки окружностей.**

221. **Описать двѣ окружности такъ, чтобы разстояніе между ихъ центрами было меньше суммы данныхъ радіусовъ, но больше ихъ разности, соединить центры съ точками пересѣченія окружностей и сравнить полученные треугольники.**

222. **Доказать, что общая хорда двухъ пересѣкающихся окружностей перпендикулярна въ прямой, проведенной черезъ центры.**

223. **Доказать, что радіусъ, проведенный черезъ середину хорды, перпендикуляренъ къ этой хордѣ.**

224. **Раздѣлить какую нибудь дугу данной окружности пополамъ (§ 204).**

225. **Доказать, что прямая, проведенная черезъ вершину равнобедреннаго треугольника и середину его основанія, перпендикулярна къ основанію и дѣлитъ уголъ при вершинѣ пополамъ.**

226. **Отъ вершины даннаго угла провести прямую такъ, чтобы она образовала съ его сторонами равные углы, но не лежала бы внутри угла.**

227. Черезъ вершину даннаго угла провести прямую такъ, чтобы она образовала съ его сторонами равные углы, но не лежала бы внутри угла.

228. Доказать, что прямыя, соединяющія вершины при основаніи равнобедреннаго треугольника съ серединами противолежащихъ сторонъ, равны между собой.

229. Доказать, что прямыя, раздѣляющія пополамъ углы при основаніи равнобедреннаго треугольника и ограниченныя точками пересѣченія съ его сторонами, равны между собой.

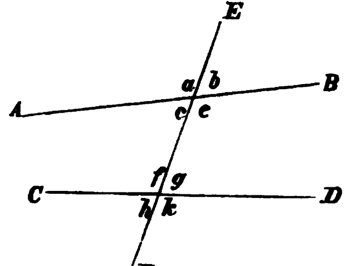
Примѣчаніе. Нѣкоторыя изъ сдѣланныхъ нами построеній называются геометрическими. Геометрическими построеніями называются тѣ, которыя выполняются при помощи только циркуля и линейки и на основаніи двухъ слѣдующихъ *требованій (постулатовъ):* 1) нужно умѣть провести прямую черезъ двѣ данныя точки и 2) нужно умѣть описать окружность, когда даны центръ и радіусъ.

IV.

Параллельныя линіи.

230. Пусть двѣ прямыя AB и CD пересѣчены третьей EF (черт. 87). Углы, которые лежатъ между первыми двумя прямыми AB и CD, называются *внутренними,* а всѣ остальные *внѣшними.* Такъ углы *c, e, f* и *g* — внутренніе, а углы *a, b, h* и *k* — внѣшніе.

87.



Тѣ углы, которые лежатъ по одну сторону пересѣкающей линіи EF, называются *односторонними.* Такъ углы *a, c, f* и *h* — односторонніе и углы *b, e, g* и *k* — тоже односторонніе.

Внутренніе углы, лежащіе по разныя стороны пересѣкающей, называются *внутренними перекрестными* углами. Углы *c* и *g* — внутренніе перекрестные. Таковы же углы *e* и *f*.

Внѣшніе углы *a* и *k* лежатъ по разныя стороны пересѣкающей и называются *внѣшними перекрестными.* Также называются и углы *b* и *h*.

Два одностороннихъ угла, изъ которыхъ одинъ внѣшній, а другой внутренній, называются *соотвѣтственными* углами. Таковы углы *a* и *f,* углы *c* и *h, b* и *g, e* и *k*.

231. *Теорема. Если двѣ прямыя перпендикулярны къ третьей, то онѣ не пересѣкутся между собой, сколько бы ихъ ни продолжить.*

мой. Окружности пересѣкутся въ точкахъ C и D, чер... проведемъ прямую. Прямая CD и раздѣлитъ данную ... въ точкѣ E пополамъ.

Доказательство. Проведемъ прямыя отъ A и B ... C и D. Треугольники DAC и CBD равны, потому ... AD = BD и CD — общая. Изъ равенства этихъ ... слѣдуетъ, что ∠ ACE = ∠ ECB. Такъ какъ △ ACB ... ный, и CE дѣлитъ уголъ при его вершинѣ ... AE = EB (§ 174).

Кстати замѣтимъ, что CE ⊥ AB (§ 175). ... указаннымъ построеніемъ мы черезъ середину ... димъ къ ней перпендикуляръ.

214. Раздѣлить данную прямую на четыре ра...

215. На данной прямой, какъ на діаметрѣ, пос...

216. Въ кругѣ провести нѣсколько хордъ и ... ставить къ ней перпендикуляръ.

217. Провести въ треугольникѣ прямыя ... противолежащихъ сторонъ.

218. Изъ середины каждой стороны ... перпендикуляръ.

219. Построить равнобедренный тре... и прямой, раздѣляющей уголъ при вершин...

220. Описать двѣ окружности так... трами было равно суммѣ данныхъ радіу... прямой, проведенной черезъ центры изъ ...

221. Описать двѣ окружности та... было меньше суммы данныхъ радіусо... центры съ точками пересѣченія окружн...

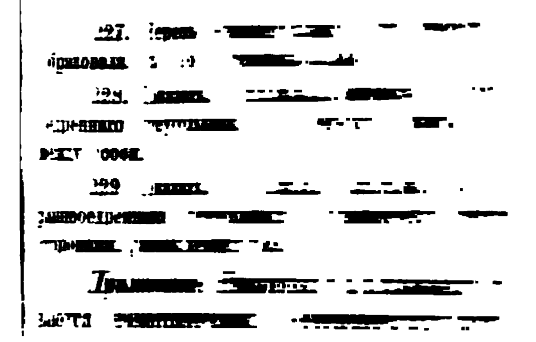
222. Доказать, что общая х... перпендикулярна въ прямой, прове...

223. Доказать, что радіусъ ... дикуляренъ къ этой хордѣ.

224. Раздѣлить какую ни...

225. Доказать, что пр... наго треугольн... и середин... и дѣлитъ уг... и вершинѣ...

226. ... образо... вершины ... сторонам...



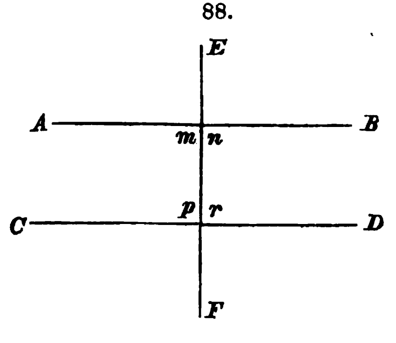
...перекрестные вну-
...но, линіи параллельны.
...90), то и $\angle c = \angle b$,
...подставить противопо-

...сумма внутреннихъ односто-*
...*ымъ прямымъ угламъ, то*
...сумма внутреннихъ односто-
...ные внутренніе углы должны
...дѣлѣ: если $\angle a + \angle b = 2d$
...мѣсто 2d сумму смежныхъ
...то $\angle a + \angle b = \angle c + \angle a$,

...прямыя можно проводить при
...льника. Положимъ, черезъ точку
...ти прямую параллельно къ линіи
...AB. Кладемъ треугольникъ какимъ-
...нибудь ребромъ къ линіи AB, а къ
...другому ребру плотно приклады-
ваемъ линейку; затѣмъ, придержи-
ваемъ линейку, а треугольникъ,
не отнимая отъ линейки, передви-
гаемъ до тѣхъ поръ, пока ребро,
приложенное къ прямой AB,
встрѣтитъ точку C, и по этому
ребру проводимъ прямую. Ясно,
что тутъ мы получаемъ равные
соотвѣтственные углы a и b, а
потому и параллельныя линіи.

...ется черезъ данную на землѣ точку C про-
...данной прямой AB (черт. 93), можно по-
...на прямой AB два кола въ произвольныхъ
...посерединѣ линіи CD поставить третій колъ F;
продолживъ прямую EF, поставить
четвертый колъ G такъ, чтобы
FG была равна EF. Прямая CG и
будетъ параллельна AB. Въ самомъ
дѣлѣ, $\triangle CFG = \triangle EFD$ (§ 169), и
потому $\angle CGF = \angle FED$, а это углы
перекрестные внутренніе; значитъ,
$CG \parallel AB$ (§ 234).

Пусть даны двѣ прямыя AB и CD (черт. 88), которыя перпендикулярны къ прямой EF. Докажемъ, что AB и CD не пересѣкутся.



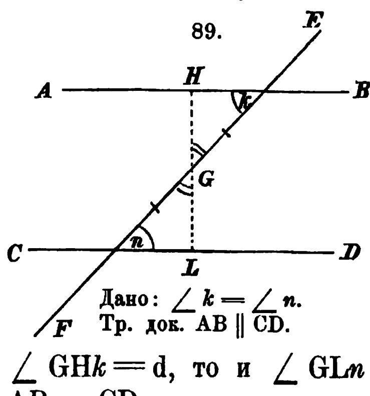
Перегнемъ чертежъ по прямой EF. Тогда по равенству прямыхъ угловъ *n* и *m* прямая *n*B пойдетъ по *m*A, а по равенству такихъ же угловъ *r* и *p* прямая *r*D пойдетъ по *p*C. Стало быть, правая часть чертежа при наложенiи на лѣвую совпадаетъ съ ней; значитъ, обѣ части чертежа совершенно одинаковы. Изъ этого слѣдуетъ, что если прямыя AB и CD встрѣтятся гдѣ нибудь съ одной стороны линiи EF, то должны встрѣтиться и съ другой; такимъ образомъ прямыя AB и CD встрѣтились бы два раза, что невозможно (§ 20). И такъ, прямыя AB и CD нигдѣ пересѣчься не могутъ.

232. *Слѣдствiе. Изъ точки, взятой внѣ прямой, можно опустить на прямую только одинъ перпендикуляръ,* иначе два перпендикуляра къ одной прямой встрѣчались бы, что невозможно.

233. *Параллельными прямыми называются такiя прямыя, которыя, находясь на одной плоскости, нигдѣ не пересѣкаются, сколько бы ихъ ни продолжать.* Слово „параллельны" обозначается знакомъ ||.

234. *Теорема. Если двѣ прямыя образуютъ съ пересѣкающей равные перекрестные внутреннiе углы, то онѣ параллельны.*

Пусть прямыя AB и CD (черт. 89) образуютъ съ пересѣкающей EF равные углы *k* и *n*. Докажемъ, что AB параллельна CD.



Изъ середины прямой *kn* опустимъ перпендикуляръ GH на прямую AB и продолжимъ его до встрѣчи съ CD. Получимъ два треугольника *k*HG и *n*GL, въ которыхъ *k*G = G*n*, потому что точка G взята по серединѣ прямой *kn*, $\angle k = \angle n$ по условiю и $\angle$ HG*k* = $\angle$ *n*GL, какъ противоположные. Стало быть, $\triangle$ *k*HG = $\triangle$ *n*GL, (§ 170), а отсюда $\angle$ GH*k* = $\angle$ GL*n*. Но такъ какъ $\angle$ GH*k* = d, то и $\angle$ GL*n* = d. Значитъ, и CD $\perp$ HL. Но если AB и CD перпендикулярны къ HL, то AB || CD.

235. *Слѣдствiе 1. Если соотвѣтственные углы равны между собой, то прямыя параллельны,* потому что, когда соотвѣтственные

углы равны между собой, тогда равны и перекрестные внутренніе, а въ этомъ случаѣ, какъ было доказано, линіи параллельны.

90.

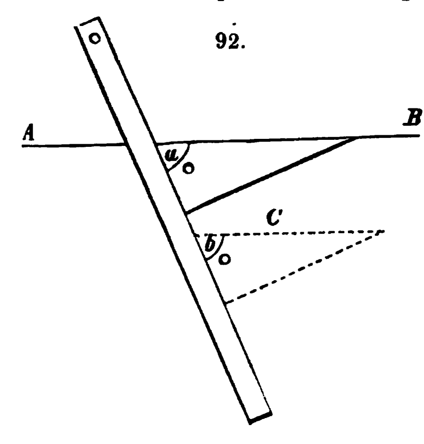
Напр. если $\angle a = \angle b$ (черт. 90), то и $\angle c = \angle b$, потому что вмѣсто $\angle a$ можно подставить противоположный $\angle c$.

236. *Слѣдствіе 2. Если сумма внутреннихъ одностороннихъ угловъ равна двумъ прямымъ угламъ, то линіи параллельны,* потому что, когда сумма внутреннихъ одностороннихъ угловъ $= 2d$, тогда перекрестные внутренніе углы должны быть равны между собой. Въ самомъ дѣлѣ: если $\angle a + \angle b = 2d$

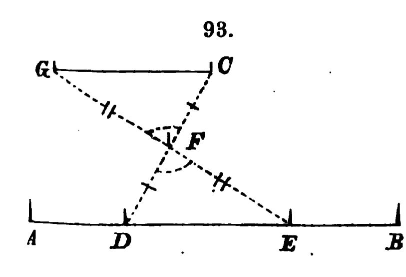
91.

(черт. 91), то, подставивъ вмѣсто $2d$ сумму смежныхъ угловъ $c + a$, получимъ, что $\angle a + \angle b = \angle c + \angle a$, слѣдовательно, $\angle b = \angle c$.

237. Параллельныя прямыя можно проводить при помощи линейки и треугольника. Положимъ, черезъ точку C (черт. 92) надо провести прямую параллельно къ линіи AB. Кладемъ треугольникъ какимъ нибудь ребромъ къ линіи AB, а къ другому ребру плотно прикладываемъ линейку; затѣмъ, придерживаемъ линейку, а треугольникъ, не отнимая отъ линейки, передвигаемъ до тѣхъ поръ, пока ребро, приложенное къ прямой AB, встрѣтитъ точку C, и по этому ребру проводимъ прямую. Ясно, что тутъ мы получаемъ равные соотвѣтственные углы a и b, а потому и параллельныя линіи.



238. Когда требуется черезъ данную на землѣ точку C провѣшить параллельную къ данной прямой AB (черт. 93), можно поступить такъ: поставить на прямой AB два кола въ произвольныхъ точкахъ D и E; затѣмъ, посерединѣ линіи CD поставить третій колъ F; продолживъ прямую EF, поставить четвертый колъ G такъ, чтобы FG была равна EF. Прямая CG и будетъ параллельна AB. Въ самомъ дѣлѣ, $\triangle CFG = \triangle EFD$ (§ 169), и потому $\angle CGF = \angle FED$, а это углы перекрестные внутренніе; значитъ, $CG \parallel AB$ (§ 234).

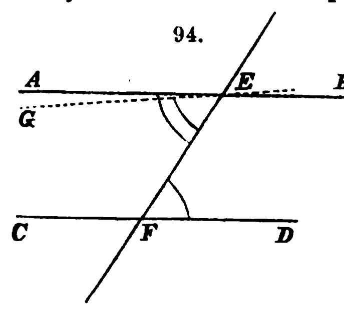


239. *Аксіома. Черезъ точку внѣ прямой можно провести только одну параллельную къ этой прямой.*

240. *Слѣдствіе. Если двѣ прямыя параллельны къ третьей линіи, то онѣ параллельны между собой,* потому что, если бы эти двѣ прямыя пересѣклись, то черезъ одну точку (пересѣченія) прошли бы двѣ линіи параллельныя къ одной прямой, что невозможно.

241. *Теорема* (обратная § 234). *Если линіи параллельны, то онѣ образуютъ съ пересѣкающей равные перекрестные внутренніе углы.*

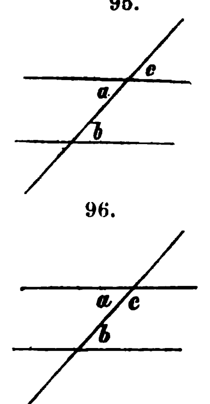
Пусть прямыя AB и CD (черт. 94) параллельны. Докажемъ, что углы AEF и EFD равны между собой.



Дано: AB || CD.
Тр. док. $\angle$ AEF = $\angle$ EFD.

Посмотримъ, не можетъ ли уголъ AEF быть больше угла EFD. Если онъ больше, то какая нибудь его часть должна быть равна углу EFD. Положимъ, что эта часть будетъ уголъ GEF. Но если уголъ GEF равенъ углу EFD, то EG должна быть параллельна CD (§ 234); тогда будемъ имѣть двѣ прямыя AB и EG, параллельныя къ CD и проходящія черезъ одну точку E, что противорѣчитъ аксіомѣ (§ 239). Стало быть, уголъ AEF не можетъ быть больше угла EFD. Точно также можно доказать, что и уголъ EFD не можетъ быть больше угла AEF. Слѣдовательно, углы AEF и EFD равны между собой.

242. *Слѣдствіе 1. Если линіи параллельны, то соотвѣтственные углы равны между собой,* потому что въ параллельныхъ линіяхъ перекрестные внутренніе углы равны между собой, а когда они равны, то и соотвѣтственные равны. Напр. если $\angle a = \angle b$ (черт. 95), то, подставивъ вмѣсто $\angle a$ равный ему $\angle c$, будемъ имѣть $\angle c = \angle b$.

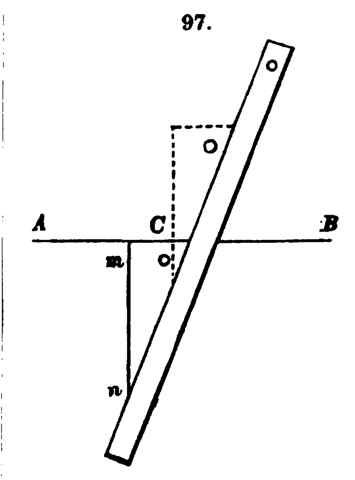


243. *Слѣдствіе 2. Если линіи параллельны, то сумма внутреннихъ одностороннихъ угловъ равна двумъ прямымъ угламъ.* Въ самомъ дѣлѣ — въ параллельныхъ линіяхъ (чертежъ 96) перекрестные внутренніе углы a и b равны между собой, а такъ какъ $\angle a + \angle c = 2d$, то и $\angle b + \angle c = 2d$ (§ 11).

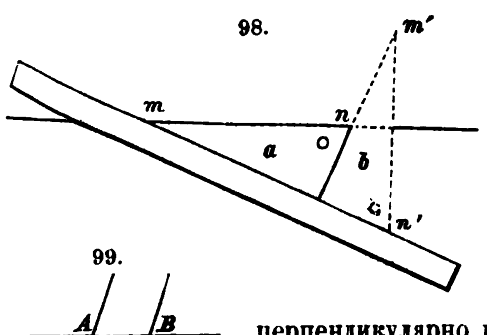
244. *Слѣдствіе 3. Прямая, перпендикулярная къ одной изъ параллельныхъ, перпендикулярна и къ другой.* Это же самое можно выра-

зить въ другой формѣ: *прямая, параллельная перпендикуляру къ другой прямой, сама къ ней перпендикулярна.*

245. Этимъ послѣднимъ слѣдствіемъ мы можемъ пользоваться для проведенія перпендикуляровъ съ помощью треугольника и линейки. Положимъ, надо изъ точки C (черт. 97) возставить перпендикуляръ къ прямой AB. Прикладываютъ треугольникъ къ прямой, а къ треугольнику линейку, какъ это показано на чертежѣ; потомъ передвигаютъ треугольникъ вдоль линейки, пока ребро *mn* не пройдетъ черезъ точку C, и проводятъ прямую черезъ эту точку. Эта прямая будетъ параллельна *mn*, которая съ AB составляетъ прямой уголъ.



Если чертежный треугольникъ не достаточно великъ, то можетъ произойти значительная погрѣшность при черченіи перпендикуляра, потому что короткое ребро треугольника трудно хорошо направить по данной прямой. Поэтому часто чертятъ такимъ способомъ: прикладываютъ треугольникъ къ данной прямой самымъ длиннымъ ребромъ (черт. 98), а линейку къ сторонѣ прямаго угла; затѣмъ, придерживая линейку, поворачиваютъ треугольникъ такъ, чтобы онъ прилегалъ къ линейкѣ другой стороной прямаго угла, т. е. изъ положенія *a* приводятъ его въ положеніе *b*. Черезъ это поворачиваніе треугольника съ одной стороны прямаго угла на другую, всѣ его ребра измѣняютъ положеніе относительно прежняго на величину прямаго угла, а потому и *m'n'* будетъ перпендикулярно къ *mn*. Теперь можно заставить скользить треугольникъ по линейкѣ и провести прямую параллельно *m'n'* черезъ заданную точку.



99.

Дано: AB || CD, AC || BD.
Треб. док. AB = CD
AC = BD.

246. *Теорема. Если двѣ параллельныхъ пересѣчены двумя другими параллельными, то части параллельныхъ между параллельными равны между собой.*

Пусть параллельныя AB и CD (черт. 99) пересѣчены другими параллельными AC и BD.

Докажемъ, что AB равна CD и AC равна BD.

Проведемъ прямую AD. Въ треугольникахъ ACD и ADB сторона AD общая, углы BAD и ADC равны, какъ перекрестные внутренніе въ параллельныхъ AB и CD при пересѣкающей AD; углы ADB и CAD такъ же равны, какъ перекрестные внутренніе въ параллельныхъ AC и BD и при той же пересѣкающей. Значитъ, $\triangle ACD = \triangle ADB$, а потому (§ 168) $AB = CD$ и $AC = BD$.

247. *Теорема. Прямыя, соединяющія соотвѣтствующіе концы равныхъ и параллельныхъ линій, сами равны и параллельны.*

100.

Дано: $BC = AD$, $BC \parallel AD$.
Треб. док. $BA = CD$, $BA \parallel CD$.

Пусть BC и AD (черт. 100) равны и параллельны между собой.

Докажемъ, что прямыя BA и CD также равны и параллельны.

Проведя прямую CA, получимъ треугольники ABC и ACD; въ нихъ сторона CA — общая, $BC = AD$ по условію и $\angle BCA = \angle CAD$, какъ углы перекрестные внутренніе въ параллельныхъ BC и AD. Стало быть, треугольники ABC и ACD равны между собой (§ 169), а потому $BA = CD$ и $\angle BAC = \angle ACD$, откуда слѣдуетъ, что BA параллельна CD (§ 234).

248. *Теорема. Если на одной сторонѣ даннаго угла отложить нѣсколько равныхъ частей и черезъ точки дѣленія провести параллельныя, пересѣкающія другую сторону, то и на этой сторонѣ отдѣлится столько же частей, равныхъ между собой.*

Данъ уголъ A (черт. 101); на сторонѣ AD отложены три равныя части: $AB = BC = CD$; черезъ точки дѣленія B, C и D проведены параллельныя $BE \parallel CF \parallel DG$. Требуется доказать, что

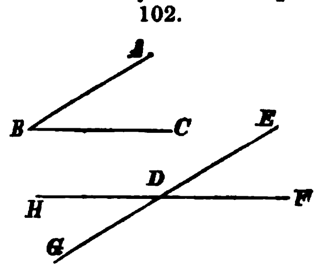
101.

Дано: $AB = BC = CD$
$BE \parallel CF \parallel DG$.
Треб. док. $AE = EF = FG$.

$AE = EF = FG$. Проведя BK и CL параллельно AG, получимъ три треугольника: ABE, BCK и CDL. Эти треугольники имѣютъ по одной равной сторонѣ $AB = BC = CD$ (по данному условію), кромѣ того у нихъ $\angle BAE = \angle CBK = \angle DCL$, какъ соотвѣтственные въ параллельныхъ AE, BK и CL (§ 242) и $\angle ABE = \angle BCK = \angle CDL$ — они тоже соотвѣтственные въ параллельныхъ BE, CF и DG. Значитъ, треугольники ABE, BCK и CDL равны между собой, а потому стороны ихъ AE, BK и CL — тоже равны; но вмѣсто BK можно подставить EF, а вмѣсто CL взять FG (§ 11), тогда выйдетъ, что $AE = EF = FG$. Это и нужно было доказать.

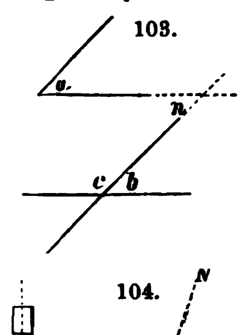
249. **Можно построить два угла такимъ образомъ, что стороны одного будутъ параллельны сторонамъ другаго.**

Положимъ, даны уголъ ABC и точка D (черт. 102). Черезъ точку D проведемъ параллельныя къ BA и BC. Получилось четыре угла; разсмотримъ стороны каждаго: 1) стороны угла EDF суть DE и DF и идутъ отъ вершины D въ такомъ же направленіи, въ какомъ и стороны угла ABC; 2) въ углѣ EDH сторона DE такого же направленія, какого сторона BA, а сторона DH идетъ по направленію, противоположному параллельной сторонѣ BC; 3) у угла HDG обѣ стороны противоположнаго направленія съ параллельными имъ сторонами угла ABC; 4) у угла GDF одна сторона DF одинаковаго, а другая DG противоположнаго направленія съ параллельными имъ сторонами даннаго угла.



250. ***Теорема. Если стороны одного угла параллельны сторонамъ другаго, то углы или равны между собой, или же сумма ихъ равна двумъ прямымъ угламъ.***

Пусть данъ уголъ *a* (черт. 103), и черезъ точку *b* проведены двѣ прямыя, параллельныя сторонамъ этого угла. Докажемъ, что $\angle b = \angle a$ и что $\angle a + \angle c = 2d$. Продолжимъ непараллельныя стороны угловъ *a* и *b*, — онѣ пересѣкутся въ какой нибудь точкѣ *n*.



1) Углы *b* и *n* — перекрестные внутренніе въ параллельныхъ линіяхъ и потому равны между собой (§ 241) — $\angle b = \angle n$, но вмѣсто угла *n* можно подставить уголъ *a*, ибо они тоже равны (по той же причинѣ); тогда получимъ, что $\angle b = \angle a$. 2) $\angle n + \angle c = 2d$ (§ 243), а подставивъ вмѣсто угла *n* равный ему уголъ *a*, получимъ $\angle a + \angle c = 2d$.

Примѣчаніе. **Не трудно замѣтить, что тѣ углы равны, которыхъ стороны — параллельныя одинаковаго или противоположнаго направленія; углы же, у которыхъ одна пара параллельныхъ одинаковаго направленія, а другая — противоположнаго, составляютъ въ суммѣ два прямыхъ.**

104.

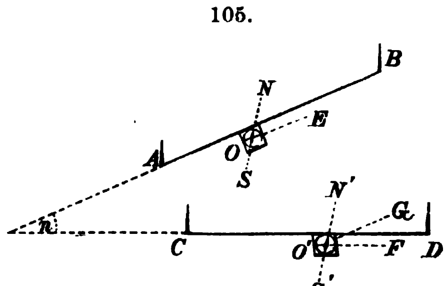
---

251. **Когда приходится на землѣ измѣрить уголъ, вершина котораго недоступна, можно употреблять *бусоль*. Бусоль (черт. 104) это магнитная**

стрѣлка, заключенная подъ стекломъ въ четыреугольной коробкѣ и свободно вращающаяся на остріи; остріе помѣщается въ центрѣ круга, который находится на днѣ коробки и раздѣленъ на градусы. Къ одной сторонѣ коробки прикрѣплена зрительная труба, ось которой параллельна діаметру окружности, проходящему 0° и 180°. Весь инструментъ находится на треножной подставкѣ. Вмѣсто зрительной трубы часто къ краямъ коробки противъ 0° и 180° придѣлываются діоптры. Если придать коробкѣ горизонтальное положеніе, то магнитная стрѣлка послѣ нѣкотораго колебанія однимъ концомъ укажетъ *сѣверъ*, а другимъ—*югъ* и всегда будетъ имѣть это направленіе сколько ни поворачивать коробку въ горизонтальной плоскости.

Положимъ, что нужно измѣрить уголъ *n* (черт. 105), который долженъ получиться при пересѣченіи двухъ прямыхъ AB и CD. Помѣстимъ бусоль такъ, чтобы труба была направлена по одной изъ сторонъ AB измѣряемаго угла; діаметръ лимба 0°—180° будетъ параллеленъ AB. Замѣтимъ число градусовъ угла NOE, заключеннаго между направленіемъ этого діаметра и магнитной стрѣлкой. Установимъ затѣмъ бусоль такъ, чтобы труба направлялась по другой сторонѣ CD; діаметръ 0°—180° будетъ тогда параллеленъ сторонѣ CD. Замѣтимъ число градусовъ угла N′O′F между этимъ діаметромъ и магнитной стрѣлкой. Теперь стоитъ только найти разность между двумя замѣченными углами NOE и N′O′F, и величина угла *n* будетъ опредѣлена. Въ самомъ дѣлѣ: проведя O′G параллельно AB, получимъ уголъ GO′F, равный углу *n* (§ 250), потому что O′G ∥ AB и O′F ∥ CD; но уголъ GO′F есть разность угловъ N′O′F и N′O′G, а уголъ N′O′G равенъ углу NOE, такъ какъ ON ∥ O′N′ и O′G ∥ OE; значитъ, уголъ GO′F есть разность угловъ N′O′F и NOE. Слѣдовательно и уголъ *n* есть разность угловъ N′O′F и NOE.

105.



Упражненія. 252. Указать на предметахъ параллельныя линіи.

253. Указать на предметахъ такія прямыя, которыя хотя и непараллельны, но не встрѣтятся, сколько бы ихъ ни продолжить.

254. Одинъ изъ внутреннихъ угловъ при пересѣченіи двухъ прямыхъ третьей равенъ 22° 30′; какой величины долженъ быть соотвѣтственный ему уголъ, чтобы линіи были параллельны? Какой величины долженъ быть другой внутренній односторонній съ нимъ уголъ?

255. Дана прямая и точка внѣ ея. Провести черезъ эту точку прямую параллельную данной прямой при помощи треугольника и линейки.

256. Черезъ данную точку провести прямую, параллельную данной прямой, при помощи транспортира по угламъ перекрестнымъ, или соотвѣтственнымъ, или одностороннимъ внутреннимъ.

257. Какъ можно при помощи графометра или мензулы провѣшить прямую, параллельную данной прямой?

258. Какъ можетъ столяръ провѣрить параллельность краевъ доски?

259. Пользуясь теоремой § 234, доказать, что, ***если перекрестные внѣшніе углы равны между собой, то линіи параллельны.***

260. Изъ теоремы § 234 вывести слѣдствіе: ***если сумма одностороннихъ внѣшнихъ угловъ равна 2d, то линіи параллельны.***

261. Объяснить: почему прямая, пересѣкающая одну изъ параллельныхъ, должна пересѣчь и другую?

262. Двѣ параллельныя пересѣчены третьей прямой и образуютъ одинъ изъ внѣшнихъ угловъ въ 37° 30′. Какой величины всѣ остальные углы?

263. Дана прямая и точка внѣ ея; черезъ эту точку провести другую прямую такъ, чтобы она пересѣкла первую подъ угломъ въ 75° (транспортиръ, линейка и треугольникъ).

264. Двѣ параллельныя пересѣчены двумя другими параллельными. Чему равна сумма четырехъ угловъ внутри этихъ линій? Чему равенъ каждый изъ всѣхъ 16-ти угловъ, если одинъ изъ внѣшнихъ равенъ 50°?

265. Можетъ ли быть сумма внутреннихъ перекрестныхъ угловъ въ параллельныхъ линіяхъ равна 2d?

266. Два соотвѣтственныхъ угла въ параллельныхъ линіяхъ раздѣлены пополамъ. Въ какомъ положеніи одна относительно другой находятся равнодѣлящія прямыя?

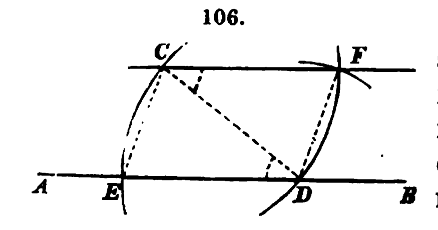
267. Два внутреннихъ одностороннихъ угла въ параллельныхъ линіяхъ раздѣлены пополамъ. Въ какомъ положеніи находятся равнодѣлящія прямыя одна относительно другой?

268. Изъ теоремы § 241 вывести слѣдствіе: ***если прямыя параллельны, то онѣ съ пересѣкающей образуютъ равные внѣшніе перекрестные углы.***

269. Изъ той же теоремы вывести: ***если линіи параллельны, то сумма внѣшнихъ одностороннихъ угловъ равна 2d.***

270. Черезъ точку C (черт. 106), данную внѣ прямой AB, провести параллельную этой прямой (циркуль и линейка).

106.



Построеніе. Принявъ точку C за центръ, опишемъ дугу, которая пересѣчетъ прямую AB въ точкѣ D; примемъ за центръ точку D и радіусомъ DC опишемъ дугу, которая пройдетъ черезъ точку C и пересѣ-

четъ AB въ точкѣ E; разстояніе EC принимаемъ за радіусъ, а точку D за центръ, описываемъ дугу и черезъ точку пересѣченія дугъ F и черезъ данную точку C проводимъ прямую CF, которая и будетъ параллельна AB.

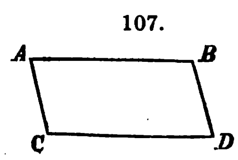
Доказательство. Треугольники CED и CDF равны между собой (§ 178), а потому уголъ CDE равенъ углу FCD и, слѣдовательно, CF параллельна AB (§ 234).

271. Построить равнобедренный треугольникъ по основанію и углу при вершинѣ (§§ 213, 204, 197, 270).

272. Построить треугольникъ съ прямыми углами при данной сторонѣ.

273. Данныя параллельныя прямыя пересѣчь прямой такъ, чтобы ея часть, заключенная между параллельными, была данной длины.

274. Черезъ данную точку провести прямую такъ, чтобы часть ея, заключенная между данными параллельными, была бы данной длины.



275. Доказать: если AB = CD и AC = BD (черт. 107), то AB || CD и AC || BD.

276. Доказать: если черезъ вершины треугольника проведемъ параллельныя противолежащимъ сторонамъ, то получится четыре равныхъ треугольника.

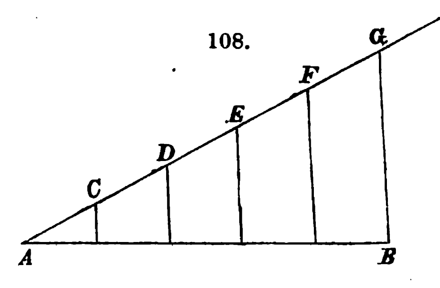
277. Данъ уголъ и точка внутри его. Провести черезъ эту точку параллельныя къ сторонамъ угла. Опредѣлить величины угловъ, образовавшихся около данной точки, если данный уголъ въ 67° 30′.

278. Данъ уголъ и точка внѣ его. Построить при данной точкѣ уголъ, дополняющій данный до 2d (циркуль и линейка).

279. Данъ острый уголъ. При точкѣ, взятой внѣ этого угла, построить уголъ, дополняющій данный до одного прямаго (линейка и циркуль).

280. Какъ при помощи бусоли можно измѣрить уголъ изъ его вершины?

281. Данную прямую AB (черт. 108) раздѣлить на нѣсколько равныхъ частей.



Раздѣлимъ AB на пять равныхъ частей.

Построеніе. Отъ точки A проведемъ произвольную прямую, отложимъ на ней пять равныхъ частей: AC=CD=DE=EF=FG и изъ точекъ C, D, E и F проведемъ прямыя, параллельныя GB; эти прямыя пересѣкутъ данную линію AB въ четырехъ точкахъ и раздѣлятъ ее на пять равныхъ частей (§ 248).

282. Построить равнобедренный треугольникъ, котораго бокъ равенъ $^2/_3$ основанія.

283. Раздѣлить данную прямую на двѣ части такъ, чтобы одна была вдвое болѣе другой.

284. Въ данномъ кругѣ отъ данной на окружности точки провести хорду, равную $^3/_5$ діаметра.

285. Данную прямую раздѣлить на двѣ части такъ, чтобы одна была въ $1\frac{1}{2}$ раза больше другой.

V.

Перпендикуляры.

286. О перпендикулярахъ намъ извѣстно во-первыхъ, что изъ одной точки, взятой на прямой, можно возставить только одинъ перпендикуляръ къ этой прямой (§ 93) и во-вторыхъ, что изъ одной точки, взятой внѣ прямой, можно опустить только одинъ перпендикуляръ на эту прямую (§ 232).

Точка пересѣченія перпендикулярныхъ линій называется *основаніемъ* перпендикуляра.

Всякая прямая, которая встрѣчаетъ другую прямую и не перпендикулярна къ ней, называется *наклонной*.

287. *Теорема. Перпендикуляръ, опущенный на прямую, короче всякой наклонной, проведенной отъ той же точки и къ той же прямой.*

Пусть изъ точки A къ прямой BC (черт. 109) проведены перпендикуляръ AD и наклонная AE. Докажемъ, что AD меньше AE. Продолжимъ перпендикуляръ AD, на его продолженіи отложимъ часть DF, равную AD, и проведемъ прямую FE. Треугольники ADE и DEF равны между собой (§ 169) и потому AE равна EF. Замѣтивъ, что между двумя точками A и F есть прямая AD+DF и ломаная AE+EF, имѣемъ: AD+DF меньше AE+EF. Вмѣсто DF и EF подставимъ имъ равныя AD и AE, выйдетъ, что AD+AD меньше AE+AE, или 2AD меньше чѣмъ 2AE, слѣдовательно, AD меньше AE.

109.

Дано: AD ⊥ BC.
Тр. док. AD < AE.

288. Длина перпендикуляра, опущеннаго на прямую изъ точки внѣ ея, считается разстояніемъ между прямой и точкой. Перпендикуляръ, опущенный изъ вершины треугольника на противолежащую сторону, называется *высотой* треугольника, сторона же, на которую опущенъ перпендикуляръ — *основаніемъ* треугольника.

289. *Въ равныхъ треугольникахъ высоты равны между собой*, потому что, когда совпадаютъ треугольники, должны совпадать и ихъ высоты, иначе можно было бы изъ одной вершины треугольника опустить два перпендикуляра на противолежащую сторону.

290. Разстояніемъ между параллельными линіями считается длина перпендикуляра, опущеннаго изъ какой-нибудь точки одной изъ параллельныхъ на другую. Разстояніе между параллельными повсюду *одинаково*, потому что перпендикуляры къ одной прямой должны быть параллельны (§ 231), а части параллельныхъ между параллельными должны быть равны.

291. *Теорема. Если двѣ наклонныя равно отстоятъ отъ основанія перпендикуляра, то онѣ равны между собой.*

Пусть CD (черт. 110) перпендикулярна къ AB и разстояніе DA равно DB. Докажемъ, что CA равна CB. Въ треугольникахъ ACD и CDB сторона CD — общая, DA по условію равна DB, и углы CDA и CDB равны, какъ прямые. Значитъ, $\triangle ACD = \triangle CDB$ (§ 169), а потому и CA равна CB.

110.

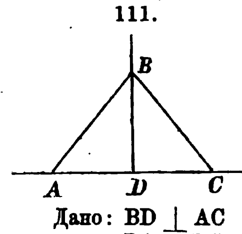
Дано: $CD \perp AB$
$DA = DB$.
Треб. док. $CA = CB$.

292. *Слѣдствіе. Всякая точка перпендикуляра, проведеннаго черезъ середину прямой, равно удалена отъ концовъ этой прямой.*

293. *Теорема* (обратная). *Если двѣ наклонныя равны между собой, то онѣ равно отстоятъ отъ основанія перпендикуляра.*

Пусть $BD \perp AC$ (черт. 111) и $BA = BC$. Докажемъ, что $DA = DC$.

111.



Дано: $BD \perp AC$
$BA = BC$.
Треб. док. $DA = DC$.

Треугольникъ ABC — равнобедренный. Перпендикуляръ BD, опущенный изъ вершины этого треугольника на основаніе, долженъ совпадать съ прямой, раздѣляющей уголъ при вершинѣ пополамъ, потому что эта прямая тоже перпендикулярна къ основанію (§ 175), а двухъ перпендикуляровъ изъ одной точки къ одной прямой опущено быть не можетъ (§ 232). Но линія, раздѣляющая уголъ при вершинѣ равнобедреннаго треугольника пополамъ, дѣлитъ и основаніе его пополамъ; слѣдовательно, $DA = DC$.

294. *Слѣдствіе. Всякая точка, равно удаленная отъ концовъ прямой, лежитъ на перпендикулярѣ, проведенномъ черезъ середину*

этой прямой. Въ самомъ дѣлѣ: если точка C (черт. 112) равно удалена отъ концовъ прямой AB, т. е. если CA = CB, то перпендикуляръ къ AB, проведенный черезъ точку C, долженъ пройти черезъ середину AB, потому что равныя наклонныя CA и CB должны быть равно удалены отъ основанія перпендикуляра.

112.

C A B

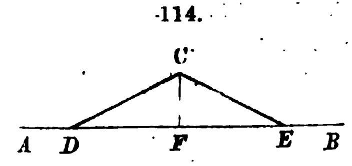
295. Если требуется провѣшить на землѣ перпендикуляръ къ прямой AB изъ точки C, данной внѣ прямой (черт. 113), нужно поставить эккеръ на данной прямой въ точкѣ, которую на глазъ можно принять за основаніе искомаго перпендикуляра; установить затѣмъ діоптры по линіи AB. Если означенная коломъ точка C окажется въ сторонѣ отъ направленія другихъ діоптровъ, то перемѣщаемъ эккеръ по прямой AB вправо или влѣво до тѣхъ поръ, пока найдемъ такую точку D, изъ которой въ направленіи однихъ діоптровъ будетъ видна линія AB, а по направленію другихъ—колъ C.

113.

C A D B

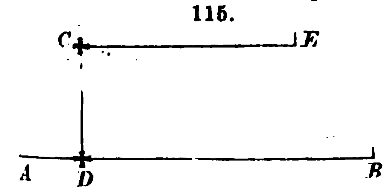
296. Если мы не имѣемъ эккера и точка C не далека отъ прямой AB, то можно поступить такъ: одинъ конецъ веревки или цѣпи утвердить въ точкѣ C (черт. 114), на прямой же AB отмѣтить точку D, въ которой будетъ находиться другой конецъ вытянутой цѣпи; точно также отмѣтить на данной прямой и другую точку E; если, затѣмъ, раздѣлить пополамъ прямую DE, то прямая CF, проведенная черезъ точку C и середину прямой DE, и будетъ искомый перпендикуляръ. Дѣйствительно, изъ равенства треугольниковъ DCF и CFE (§ 178) слѣдуетъ, что $\angle CFD = \angle CFE$ или $CF \perp AB$.

114.



297. При помощи эккера можно провѣшить на землѣ параллельную данной прямой AB черезъ точку C (черт. 115). Для этого сначала отыскиваютъ при помощи эккера основаніе перпендикуляра CD; затѣмъ, отмѣтивъ это основаніе коломъ D, переносятъ эккеръ въ точку C и провѣшиваютъ CE перпендикулярно къ CD; прямая CE будетъ параллельна къ AB (§ 231).

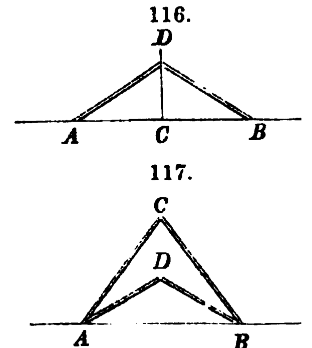
115.



Упражненія. 298. Опустить перпендикуляръ на прямую изъ точки данной внѣ прямой (треуг. и лин.).

299. Какъ опустить перпендикуляръ къ провѣшенной прямой изъ точки внѣ ея при помощи эккера, или астролябіи, или мензулы (съ алидадой и треуг.)?

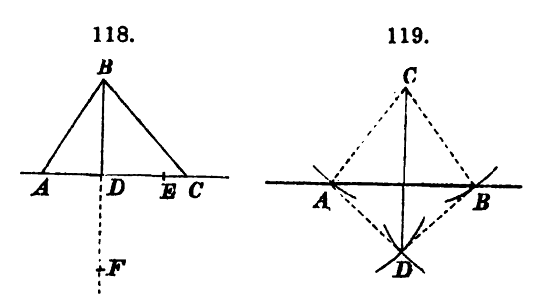
300. Возставить или опустить перпендикуляръ къ прямой AB (черт. 116), проведенной на землѣ. Если точка дана на прямой, то откладываемъ отъ этой точки C на прямой равныя части, кладемъ на землю двѣ равной длины палки AD и BD, какъ показано на чертежѣ, и проводимъ прямую CD.



301. Доказать: если двѣ пары равныхъ кольевъ будутъ расположены на землѣ, какъ показано на чертежѣ 117, то прямая, проведенная черезъ точки C и D, раздѣлитъ линію AB пополамъ и будетъ къ ней перпендикулярна.

302. Доказать: изъ двухъ наклонныхъ та больше, которая отъ перпендикуляра дальше.

Дано: BD⊥AC (черт. 118) и DC>AD. Тр. док. BC>BA. Отложить DE=DA, продолжить BD и отложить DF=BD; сравнить двѣ ломанныя BC+CF и BE+EF (§ 33) и т. д.



303. Изъ точки внѣ прямой провести къ ней три или четыре равныя прямыя.

304. Изъ точки C, данной внѣ прямой AB, опустить на прямую перпендикуляръ (цирк. и лин. черт. 119).

Построеніе. Принявъ точку C за центръ, радіусомъ болѣе разстоянія между C и AB опишемъ дугу; принимая за центры точки A и B, равными радіусами болѣе половины AB описываемъ дуги; черезъ C и D проведемъ прямую; эта прямая CD и будетъ перпендикулярна къ AB.

Доказательство. Точка C равно удалена отъ A и B, точка D также равно удалена отъ A и B; стало быть, точки C и D лежатъ на перпендикулярѣ къ AB (§ 294), а черезъ эти двѣ точки можетъ пройти только одна прямая CD; значитъ, она и перпендикулярна къ AB.

305. Построить равнобедренный треугольникъ по основанію и высотѣ (цирк. и лин.).

306. Построить треугольникъ по даннымъ основанію, высотѣ и углу при основаніи (§§ 197, 209 и 270).

307. Построить равнобедренный треугольникъ по углу при основаніи и высотѣ (цирк. и лин.).

308. Найти нѣсколько точекъ, изъ которыхъ каждая равно удалена отъ двухъ данныхъ (цирк. и лин.).

309. Даны прямая AB и точка C (черт. 120). Изъ всѣхъ точекъ, равно удаленныхъ отъ концовъ A и B, выбрать тѣ, которыя отъ точки C находятся на разстояніи *n*.

120.

C

A B

310. Изъ точки, взятой внѣ даннаго угла, опустить перпендикуляры на его стороны. Какой величины уголъ между перпендикулярами, если данный въ 36°? (Провести вспомогательныя линіи отъ вершины угла перпендикулярно сторонамъ).

311. Взять точку внутри даннаго угла и опустить перпендикуляры на его стороны.

Какой величины будетъ уголъ между этими перпендикулярами, если данный въ 22° 30′?

312. Описать окружность такъ, чтобы она проходила черезъ двѣ данныя точки. Сколько можно описать такихъ окружностей?

313. Гдѣ расположены центры окружностей, проходящихъ черезъ двѣ данныя точки?

314. Даны три точки; провести окружность такъ, чтобы она проходила черезъ всѣ эти точки.

315. Даны три точки; отыскать четвертую, въ равномъ разстояніи отъ трехъ данныхъ. Какъ должны быть расположены три данныя точки?

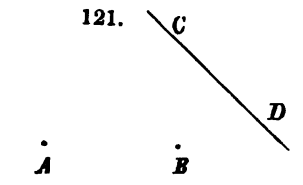
316. Дана прямая и внѣ ея двѣ точки; найти на данной прямой точку, равноотстоящую отъ двухъ данныхъ.

317. Черезъ точку, взятую внутри даннаго угла, провести прямую, которая составила бы со сторонами его равные углы.

318. Построить треугольникъ такъ, чтобы его основаніемъ была данная прямая AB, вершина лежала бы на окружности, описанной изъ центра A радіусомъ, равнымъ AB, а высота равнялась бы половинѣ AB.

319. Дана прямая и внѣ ея двѣ точки. Найти на прямой такую точку, чтобы прямыя, проведенныя отъ нея къ двумъ даннымъ точкамъ, образовали бы съ данной прямой равные углы.

320. На данной окружности найти точку, равноотстоящую отъ двухъ данныхъ точекъ.



121.

321. Даны двѣ точки A и B (черт. 121) и прямая CD. Найти точку, которая равно удалена отъ A и B, а отъ прямой CD находится на разстояніи *n*.

322. Даны двѣ непараллельныя прямыя. Провести черезъ точку, данную на одной

изъ этихъ линій, прямую такъ, чтобы она образовала съ данными прямыми равные углы. Данныя прямыя на чертежѣ не встрѣчаются.

323. Построить равнобедренный треугольникъ, когда даны одна изъ равныхъ сторонъ и разстояніе ея отъ противолежащей вершины.

324. Построить треугольникъ по основанію, высотѣ и одной изъ другихъ сторонъ.

325. Построить треугольникъ по высотѣ и прилегающимъ къ ней сторонамъ.

326. Построить треугольникъ по высотѣ, прилегающей въ ней сторонѣ и углу противъ этой стороны.

327. Построить треугольникъ по высотѣ и угламъ, прилегающимъ къ основанію.

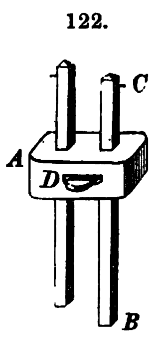
328. Построить треугольникъ, стороны котораго (или ихъ продолженія) проходили бы черезъ данныя три точки, одна изъ сторонъ была бы параллельна данной прямой, и два угла были бы равны даннымъ.

329. Доказать: если провести прямую черезъ двѣ точки, взятыя на равномъ разстояніи отъ данной прямой по одну сторону, то эта прямая будетъ параллельна къ данной прямой.

---

330. Для черченія прямыхъ параллельныхъ къ краю доски столяры употребляютъ инструментъ, называемый *ресмусомъ* (рейсмасъ). Онъ состоитъ изъ колодки A (черт. 122), въ отверстіе которой пропущена линейка BC со штифтомъ C*). Линейку можно передвигать такъ, что штифтъ можетъ удаляться и приближаться къ колодкѣ. Если нужно провести параллельную къ краю доски на данномъ разстояніи, выдвигаютъ линейку на сколько нужно, закрѣпляютъ ее клиномъ D и, прижавъ колодку къ кромкѣ доски той площадкой, которая обращена къ штифту, передвигаютъ вдоль кромки инструментъ, причемъ штифтъ начертитъ требуемую линію или, какъ говорятъ, *риску*.

122.



На нашемъ чертежѣ представленъ двойной рейсмасъ.

---

*) На хорошихъ рейсмасахъ площадка колодки, обращенная къ штифту, покрыта стальной пластинкой.

VI.

Многоугольники. Сумма угловъ треугольника и многоугольника. Прямоугольные треугольники.

331. Часть плоскости, ограниченная со всѣхъ сторонъ прямыми линіями, называется *многоугольникомъ*. Сумма всѣхъ сторонъ многоугольника называется *периметромъ*.

Если продолжить сторону многоугольника, то между ея продолженіемъ и другой стороной получится уголъ, называемый *внѣшнимъ* угломъ многоугольника. Напр. уголъ DEK (черт. 123) внѣшній.

123.

Прямая, проведенная въ многоугольникѣ между двумя вершинами, не лежащими на одной сторонѣ, называется *діагональю*.

332. Если въ многоугольникѣ провести всѣ діагонали изъ одной вершины, то весь многоугольникъ раздѣлится на треугольники (черт. 123). Число треугольниковъ выходитъ всегда двумя меньше числа сторонъ многоугольника.

333. *Теорема. Сумма угловъ всякаго треугольника равна двумъ прямымъ угламъ.*

Пусть будетъ △ABC (черт. 124). Докажемъ, что ∠BAC + ∠ABC + ∠BCA = 2d. Продолжимъ сторону AC и черезъ вершину C проведемъ прямую CE параллельно AB. Сумма угловъ при вершинѣ C по одну сторону прямой AD — ECD, BCE и BCA должна быть равна двумъ прямымъ угламъ (§ 102). Но вмѣсто угла ECD можно взять равный ему соотвѣтственный уголъ BAC (§ 242, CE ∥ AB и AD — пересѣкающая), а вмѣсто угла BCE можно подставить уголъ ABC, — эти углы равны, какъ перекрестные внутренніе (§ 241, CE ∥ BA и BC — пересѣкающая). Подставивъ равные, получимъ ∠BAC + ∠ABC + ∠BCA = 2d.

124.

Тр. док.
∠BAC + ∠ABC + ∠BCA = 2d.

334. *Слѣдствіе* 1. *Внѣшній уголъ треугольника равенъ суммѣ двухъ внутреннихъ не смежныхъ съ нимъ угловъ.*

Такъ ∠BCD = ∠BAC + ∠ABC.

335. *Слѣдствіе* 2. *Если даны два угла какого нибудь треугольника, то, вычтя ихъ величину изъ* 2d, *получимъ третій уголъ.*

336. *Слѣдствіе* 3. *Когда два угла одного треугольника равны двумъ угламъ другаго, то и третьи ихъ углы равны между собой.*

Дѣйствительно, суммы угловъ обоихъ треугольниковъ одинаковы (каждая равна 2d) и если мы отнимемъ по два равныхъ угла, то въ остаткахъ должны получиться равные третьи углы.

337. *Слѣдствіе* 4. *Въ равностороннемъ треугольникѣ каждый уголъ равенъ* $^2/_3$d.

338. *Слѣдствіе* 5. *Въ треугольникѣ можетъ быть только одинъ уголъ прямой или тупой, — остальные должны быть острые.*

339. *Теорема. Если треугольникъ имѣетъ два равныхъ угла, то онъ равнобедренный.*

Пусть въ треугольникѣ ABC (черт. 125) углы BAC и BCA равны между собой. Докажемъ, что ABC — треугольникъ равнобедренный, т. е. BA = BC.

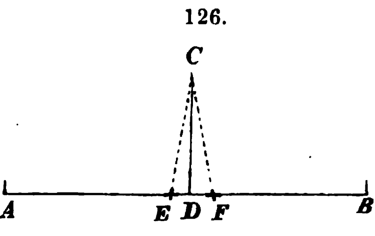
125.

Дано: ∠BAC = ∠BCA.
Тр. д. BA = BC.

Опустимъ изъ вершины третьяго угла B перпендикуляръ на противоположную сторону. Въ треугольникахъ ABD и BDC сторона BD — общая, ∠BDA = ∠BDC, потому что BD ⊥ AC, по условію ∠BAD = ∠BCD, а потому и третьи углы ABD и CBD тоже равны (§ 336). Итакъ, треугольники ABD и BDC равны между собой (§ 170), а потому и BA = BC.

340. *Слѣдствіе. Если въ треугольникѣ всѣ три угла одинаковы, то онъ равносторонній.*

341. Если требуется провѣшить перпендикуляръ изъ точки C внѣ данной прямой AB (черт. 126) и мы имѣемъ невѣрный эккеръ, то на данной прямой могутъ быть найдены двѣ точки E и F, изъ которыхъ въ направленіи однихъ діоптровъ увидимъ прямую AB, а черезъ другіе — колъ C. Отыскавъ эти точки, поставимъ по срединѣ EF колъ D. Прямая CD и будетъ искомый перпендикуляръ. Дѣйствительно, въ треугольникѣ ECF уголъ E равенъ углу F, какъ углы данные однимъ и тѣмъ же эккеромъ; значитъ, CE = CF (§ 339); разсматривая теперь треугольники ECD и DCF, найдемъ, что у нихъ всѣ стороны одинаковы, а потому △ECD = △DCF и слѣдовательно, ∠CDE = ∠CDF или CD ⊥ AB.



342. Треугольникъ, въ которомъ одинъ изъ угловъ прямой, называется *прямоугольнымъ* треугольникомъ; двѣ его стороны, образующія прямой уголъ, называются *катетами,* а сторона противъ прямаго угла *гипотенузой.*

343. *Прямоугольные треугольники равны, если катеты одного порознь равны катетамъ другаго* (§ 169).

344. *Прямоугольные треугольники равны, если катетъ и при немъ острый уголъ одного равны катету и острому при немъ углу другаго* (§ 170).

345. *Прямоугольные треугольники равны, если катетъ и противолежащій уголъ одного равны катету и противолежащему углу другаго* (§§ 336 и 170).

346. *Прямоугольные треугольники равны, если гипотенуза и острый уголъ одного равны гипотенузѣ и острому углу другаго* (§§ 336 и 170).

347. *Теорема. Прямоугольные треугольники равны, если гипотенуза и катетъ одного порознь равны гипотенузѣ и катету другаго.*

Положимъ, что въ прямоугольныхъ треугольникахъ ABC и DEF (черт. 127), кромѣ прямыхъ угловъ C и F равны гипотенузы (BA=ED) и катеты (BC=EF).

127.

Продоливъ катетъ AC, получимъ прямой уголъ BCG (§ 100). Приложимъ теперь треугольникъ DEF къ ABC такъ, чтобы вершина F упала въ C и сторона FE пошла по CB. Тогда по равенству катетовъ BC и EF вершина E упадетъ въ B, а по равенству прямыхъ угловъ EFD и BCG катетъ FD пойдетъ по CG, гипотенуза же ED приметъ положеніе BG. Такъ какъ BA=ED, а ED=BG, то BA и BG можно разсматривать, какъ равныя наклонныя и потому CA=CG (§ 293). Подставивъ вмѣсто CG равную ей DF, получимъ CA=DF, т. е. что и третьи стороны данныхъ треугольниковъ равны. Слѣдовательно, △ABC=△DEF (§ 178).

348. *Теорема. Сумма угловъ всякаго многоугольника равна двумъ прямымъ угламъ, умноженнымъ на число, которое двумя меньше числа сторонъ.*

Пусть въ многоугольникѣ будетъ n сторонъ. Когда мы проведемъ всѣ діагонали изъ одной вершины, то многоугольникъ раздѣлится на $n-2$ треугольника. Такъ какъ сумма угловъ каждаго треугольника равна 2d, а всѣхъ треугольниковъ $n-2$, то сумма всѣхъ угловъ во всѣхъ треугольникахъ будетъ $2d \times (n-2)$. Углы же многоугольника составляются изъ всѣхъ угловъ треугольниковъ (черт. 128), а потому сумма угловъ многоугольника будетъ та же самая, т. е. $2d \times (n-2)$.

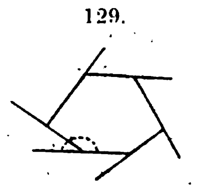
128.

Примѣчаніе. То же самое число получится, если мы 2d умножимъ на число сторонъ и изъ произведенія вычтемъ 4d, т. е. $2d \times (n-2) = 2dn - 4d$.

349. *Теорема. Сумма внѣшнихъ угловъ многоугольника равна четыремъ прямымъ угламъ.*

Каждый внѣшній уголъ многоугольника со смежнымъ внутреннимъ (черт. 129) равны въ суммѣ 2d и потому сумма всѣхъ угловъ *внѣшнихъ и внутреннихъ* будетъ равна 2d, умноженнымъ на число сторонъ, т. е. 2dn. Сумма же *однихъ внутреннихъ* угловъ равна 2dn — 4d, т. е. на 4d меньше. Значитъ, отбрасывая внѣшніе углы, мы уменьшаемъ общую сумму угловъ на 4d. Стало быть, 4d и есть сумма всѣхъ внѣшнихъ угловъ многоугольника.

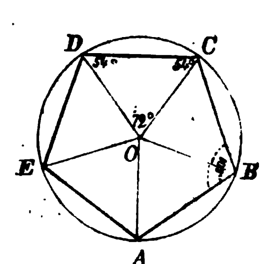
129.



350. Пусть дана окружность. Если въ этой окружности провести радіусы такъ, чтобы всѣ углы, образованные ими, были равны между собой, и соединить хордами концы радіусовъ, то въ кругѣ получатся равные равнобедренные треугольники. Всѣ эти равнобедренные треугольники образуютъ одинъ многоугольникъ, у котораго всѣ стороны равны между собой и углы тоже равны.

Положимъ, что мы построили при центрѣ O пять угловъ по 72° каждый (черт. 130), тогда остальные углы въ треугольникахъ будутъ по 54°, а углы многоугольника, напр. ∠ABC—по 108°. Стороны AB, BC, CD и т. д. равны между собой, потому что всѣ треугольники равны (§ 169).

130.



351. Многоугольникъ, у котораго равныя стороны и равные углы, называется *правильнымъ многоугольникомъ*. Когда извѣстно число сторонъ правильнаго многоугольника, то можно вычислить величину его угловъ. Стоитъ только вычислить сумму всѣхъ угловъ (§ 348) и эту сумму раздѣлить на число угловъ: 2d × (n — 2) : n. Напр. каждый уголъ правильнаго десятиугольника будетъ:
2d × (10 — 2) : 10 = (2d × 8) : 10 = 1 3/5 d. Вычисляя то же самое градусами, будемъ имѣть: (180° × 8) : 10 = 144°.

Можно найти величину внутренняго угла правильнаго многоугольника, вычисливъ сначала величину внѣшняго и вычтя ее изъ 2d.

Упражненія. 352. На сколько треугольниковъ раздѣлится двѣнадцатиугольникъ, если въ немъ провести изъ одной вершины всѣ діагонали?

353. Въ треугольникѣ два угла по 45°, какой величины третій уголъ? Какой величины будетъ третій уголъ, если одинъ 35°40′, а другой 100°50′?

354. Одинъ изъ угловъ треугольника 54°, а внѣшній несмежный ему уголъ 100°. Какой величины прочіе два угла треугольника?

355. Чему равна сумма всѣхъ внѣшнихъ угловъ треугольника?

356. Построить треугольникъ, въ которомъ одинъ уголъ 94°, а другой 98°.

357. Можетъ ли быть равнобедренный прямоугольный треугольникъ?— а равносторонній?

358. Внѣшній уголъ при вершинѣ равнобедреннаго треугольника равенъ 42° 35′; вычислить всѣ внутренніе и внѣшніе его углы.

359. Вычислить сумму угловъ шестиугольника, двѣнадцатиугольника и двадцатичетырехугольника.

360. Вычислить сумму внутреннихъ и внѣшнихъ угловъ десятиугольника.

361. Вычислить сумму внѣшнихъ угловъ десятиугольника.

362. Опредѣлить периметръ правильнаго восьмиугольника, сторона котораго равна шести дюймамъ.

363. Вычислить внѣшній уголъ правильнаго десятиугольника; вычислить внутренній его уголъ.

364. Построить правильный восьмиугольникъ при помощи транспортира

365. Построить правильный пятиугольникъ, котораго сторона дана.

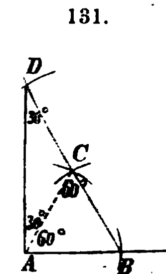
366. Построить правильный десятиугольникъ, котораго сторона равна одному дюйму.

367. Построить уголъ 60° безъ помощи транспортира (цирк. и лин.).

368. Построить уголъ равный $^1/_3$d (цирк. и лин.).

369. Раздѣлить прямой уголъ на три равныя части.

131.



370. Возставить перпендикуляръ къ прямой AB (черт. 131) изъ ея конечной точки A, предполагая, что прямую нельзя продолжить за эту точку (цирк. и линейка).

Построеніе. Принявъ за центръ точку A, описываемъ дугу CB произвольнымъ радіусомъ. Тѣмъ же радіусомъ описываемъ дугу, принимая за центръ B, точку пересѣченія дуги съ данной прямой. Черезъ точки B и C проводимъ прямую и откладываемъ CD равную BC. Прямая AD будетъ перпендикулярна къ AB.

Доказательство. Треугольникъ ACB—равносторонній, а потому $\angle$CAB = 60° и $\angle$ACB = 60°. Углы CDA и CAD равны между собой, потому что CD = CA; а такъ какъ вмѣстѣ они равны углу ACB (§ 334), въ которомъ 60°, то каждый изъ нихъ равенъ 30°; значитъ, $\angle$CAD = 30°. Слѣдовательно, $\angle$DAB = 60° + 30° = 90° и AD $\perp$ AB.

371. Построить равносторонній треугольникъ, когда дана его высота.

372. Въ какомъ многоугольникѣ сумма внутреннихъ угловъ равна суммѣ внѣшнихъ?

373. Въ тупоугольномъ треугольникѣ провести всѣ три высоты.

374. Въ какомъ случаѣ равносторонніе треугольники будутъ равны?

375. Если внѣшній уголъ правильнаго многоугольника въ 30°, то сколько сторонъ въ этомъ многоугольникѣ?

376. Сколько правильныхъ треугольниковъ можно расположить вокругъ одной вершины? Построить ихъ. Какой многоугольникъ получится?

377. Въ какомъ правильномъ многоугольникѣ внутренній уголъ въ 144°?

378. Доказать: перпендикуляры, опущенные изъ середины основанія на равныя стороны равнобедреннаго треугольника, равны между собой.

379. Построить треугольникъ по двумъ даннымъ угламъ и сторонѣ противъ одного изъ нихъ (цирк. и лин.).

380. Построить равнобедренный треугольникъ по данному периметру и углу при основаніи. (Построить сначала равнобедренный треугольникъ на периметрѣ, затѣмъ §§ 204, 270).

381. Построить треугольникъ по данному периметру и двумъ угламъ при основаніи.

382. Построить прямоугольный треугольникъ по данному катету и углу противъ него.

383. Построить прямоугольный треугольникъ по катету и гипотенузѣ.

384. Построить прямоугольный треугольникъ по гипотенузѣ и острому углу.

385. Построить по данной гипотенузѣ прямоугольный треугольникъ, въ которомъ одинъ острый уголъ вдвое болѣе другаго.

386. Даны два угла треугольника; построить третій уголъ (цирк. и лин.).

387. Построить треугольникъ, когда даны: сторона, противолежащій уголъ и разность двухъ другихъ угловъ.

388. Доказать, что разстоянія равныхъ сторонъ равнобедреннаго треугольника отъ противолежащихъ вершинъ одинаковы.

389. Черезъ данную точку провести прямую такъ, чтобы она проходила между двумя другими данными точками на равномъ отъ нихъ разстояніи.

390. Найти нѣсколько точекъ, изъ которыхъ каждая равно отстояла бы отъ сторонъ даннаго угла.

391. Найти точку, равноотстоящую отъ сторонъ даннаго треугольника

VII.

Трапеція и параллелограммы.

392. Пусть двѣ параллельныя линіи AB и CD (черт. 132) пересѣчены прямой EC. Если по одну сторону EC возьмемъ на параллельныхъ по точкѣ F и G и проведемъ прямую FG, то получимъ четыреугольникъ CEFG, у котораго двѣ стороны EF и CG параллельны.

132.

393. *Четыреугольникъ, у котораго двѣ противоположныя стороны параллельны, называется трапеціей.*

Параллельныя стороны трапеціи называются ея ***основаніями***, а другія двѣ—***боками***. Разстояніе между основаніями трапеціи называется ея ***высотой***.

Прямая, проведенная черезъ середину одного бока параллельно основанію, называется *средней линіей* трапеціи.

394. *Теорема. Средняя линія трапеціи равна половинѣ суммы основаній.*

Пусть ABCD (черт. 133) будетъ трапеція. Изъ середины бока AB проведена прямая EF параллельно основаніямъ трапеціи. Докажемъ, что EF равна половинѣ суммы основаній BC+AD.

133.

Дано: $BC \| AD \| EF$
$BE = EA$.
Треб. док. $EF = \frac{BC + AD}{2}$.

Проведемъ прямую KL параллельно CD и продолжимъ сторону BC до пересѣченія съ KL. Въ треугольникахъ EKB и EAL стороны BE и EA равны между собой, потому что точка E середина AB; уголъ KEB равенъ углу AEL, какъ противоположные; уголъ KBE равенъ углу EAL, какъ внутренніе перекрестные въ параллельныхъ KC и AD. Стало быть, треугольники EKB и EAL равны между собой (§ 170), а потому сторона KB равна AL. Замѣтивъ, что EF равна KC (§ 246), найдемъ, что EF больше BC на прямую KB или

$$EF = BC + KB;$$

сравнивая EF съ AD, увидимъ, что EF меньше AD на AL или

$$EF = AD - AL.$$

Сложивъ найденныя равенства (§ 12), получимъ, что

$$2EF = BC + AD + KB - AL;$$

но такъ какъ по доказанному $KB = AL$, то $KB - AL = 0$ и потому

$$2EF = BC + AD$$

откуда слѣдуетъ, что

$$EF = \frac{BC + AD}{2}.$$

395. **Когда двѣ параллельныя пересѣчены двумя другими параллельными, образуется четыреугольникъ, въ которомъ обѣ пары противолежащихъ сторонъ параллельны.**

Четыреугольникъ, въ которомъ противолежащія стороны параллельны, называется параллелограммомъ.

Всякую сторону параллелограмма можно принять за его *основаніе*. Разстояніе между основаніемъ и противолежащей стороной называется ***высотой*** параллелограмма.

396. **Противоположныя стороны параллелограмма должны быть равны между собой, потому что онѣ суть части параллельныхъ между параллельными (§ 246).**

397. **Противолежащіе углы параллелограмма равны между собой (§ 250), а углы, расположенные около одной стороны, въ суммѣ равны 2d (§ 243).**

398. *Теорема.* ***Діагональ дѣлитъ параллелограммъ на два равныхъ треугольника.***

Пусть ABCD (черт. 134) будетъ параллелограммъ, въ которомъ проведена діагональ AC.

134.

Дано: BC∥AD и BA∥CD.

Тр. д. $\triangle ABC = \triangle CAD$.

Въ треугольникахъ ABC и CAD сторона AC общая, сторона AB равна DC и сторона BC равна AD (§ 246). Слѣдовательно, $\triangle ABC = \triangle CAD$ (§ 178).

399. *Теорема. Діагонали параллелограмма дѣлятъ одна другую пополамъ.*

135.

Дано: BC ∥ AD
BA ∥ CD.
Тр. док. AO = OC
BO = OD.

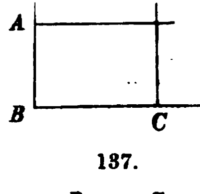
Пусть въ параллелограммѣ ABCD (ч. 135) проведены діагонали AC и BD. Надо доказать, что онѣ, пересѣкаясь въ точкѣ O, дѣлятся этой точкой пополамъ.

Въ треугольникахъ BOC и AOD сторона BC равна AD (§ 396), уголъ OBC равенъ углу ODA, какъ перекрестные внутренніе въ параллельныхъ BC и AD при пересѣкающей BD, уголъ BCO равенъ углу OAD, какъ перекрестные въ тѣхъ же параллельныхъ при пересѣкающей AC. Значитъ, треугольники BOC и

AOD равны. Изъ равенства этихъ треугольниковъ слѣдуетъ (§ 168), что AO = OC и BO = OD, т. е. діагонали дѣлятъ одна другую пополамъ.

400. Пусть будетъ прямой уголъ ABC (черт. 136); на сторонахъ его возьмемъ по точкѣ и проведемъ параллельныя сторонамъ линіи — получимъ параллелограммъ, у котораго всѣ углы прямые (§ 397).

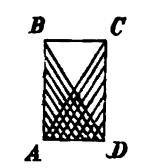
136.



Параллелограммъ съ прямыми углами называется прямоугольникомъ.

401. *Теорема. Діагонали прямоугольника равны между собой.*

137.

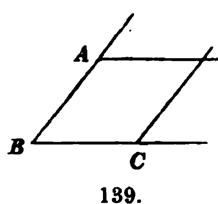


Дано: ∠BAD = d
BC ∥ AD
BA ∥ CD.
Треб. док. AC = BD.

Въ прямоугольникѣ ABCD (черт. 137) проведены діагонали AC и BD. Докажемъ, что AC = BD. Въ треугольникахъ ABD и ACD сторона AD — общая, AB = DC, какъ противолежащія стороны параллелограмма, и ∠BAD = ∠CDA, какъ прямые. Стало быть, △ABD = △ACD (§ 169) и потому BD = AC.

402. На сторонахъ произвольнаго угла ABC (черт. 138) отложимъ отъ его вершины равныя части BA = BC, черезъ точки A и C проведемъ параллельныя къ сторонамъ; получится параллелограммъ, въ которомъ всѣ стороны одинаковой длины.

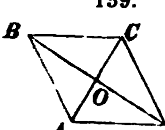
138.



Параллелограммъ, у котораго всѣ стороны равны между собой, называется ромбомъ.

403. *Теорема. Діагонали ромба дѣлятъ его углы пополамъ и перпендикулярны одна къ другой.*

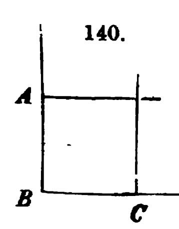
139.



Дано: AB = AD
BC ∥ AD, BA ∥ CD.
Треб. док.
∠BCA = ∠ACD
CA ⊥ BD.

Пусть въ ромбѣ ABCD (черт. 139) проведены діагонали AC и BD. Докажемъ, что 1) ∠BCA = ∠ACD и 2) CA ⊥ BD. Въ треугольникахъ BCO и OCD сторона CO — общая, BC = CD, какъ стороны ромба, и BO = OD (§ 399). Значитъ, △BCO = △OCD (§ 178) и потому 1) ∠BCA = ∠ACD и 2) ∠COB = ∠COD и стало быть, CA ⊥ BD.

140.



404. Если на сторонахъ прямаго угла ABC (черт. 140) отложить отъ его вершины равныя части BA = BC и черезъ точки A и C провести параллельныя сторонамъ, то получится параллелограммъ съ прямыми углами и равными сторонами.

Параллелограммъ, у котораго всѣ стороны равны и углы прямые, называется квадратомъ.

Свойства діагоналей квадрата можно найти, разсматривая его какъ параллелограммъ вообще, какъ прямоугольникъ и какъ ромбъ.

Упражненія. 405. Дана трапеція. На данной неограниченной прямой отдѣлить часть, равную средней линіи трапеціи, не проводя ея въ данной трапеціи.

406. Доказать: прямая, проведенная черезъ середину одного бока трапеціи параллельно основаніямъ, раздѣлитъ и другой бокъ пополамъ.

407. Если проведена прямая параллельно одному изъ основаній трапеціи, будетъ ли она параллельна и другому основанію?

408. Чему равна сумма угловъ трапеціи? параллелограмма?

409. Построить трапецію по даннымъ основаніямъ, одному боку и высотѣ. Высота трапеціи можетъ ли быть больше ея бока?

410. Построить параллелограммъ по двумъ смежнымъ сторонамъ.

411. Построить параллелограммъ по двумъ смежнымъ сторонамъ и углу между ними.

141.

412. Построить параллелограммъ по двумъ смежнымъ сторонамъ и діагонали.

413. Положимъ, мы имѣемъ небольшія планки, которыя будемъ скрѣплять шарнирами (черт. 141) такъ, чтобы онѣ могли свободно сдвигаться и раздвигаться. Изъ этихъ планокъ при помощи шарнировъ построены фигуры, представленныя на черт. 142—157.

142. 143. 144. 145. 146.

147. 148. 149. 150. 151.

152. 153. 154. 155. 156.

Рѣшить: которыя изъ фигуръ подвижны въ своихъ частяхъ и которыя неподвижны.

Гдѣ надо придѣлать планки въ измѣняющихся фигурахъ, чтобы онѣ не могли измѣняться?

157.

Напр. чертежъ 143 представляетъ параллелограммъ. Однѣ и тѣ же стороны могутъ образовать различные параллелограммы, потому что для построенія параллелограмма по даннымъ сторонамъ можно брать произвольный уголъ. Такъ какъ въ данной фигурѣ неизмѣнны только стороны, то она подвижна.

На чертежѣ 144 представленъ тоже параллелограммъ; но планочка EF, пересѣкая стороны AB и AC, образуетъ съ ними треугольникъ AEF, котораго всѣ стороны неизмѣнны, а потому и самъ треугольникъ не можетъ измѣняться (§ 178); стало быть, не измѣняется и уголъ BAC. Такъ какъ не могутъ измѣняться стороны AB и AC, а также и уголъ BAC, то неподвиженъ и треугольникъ ABC (§ 169), который получимъ, когда вообразимъ прямую BC.

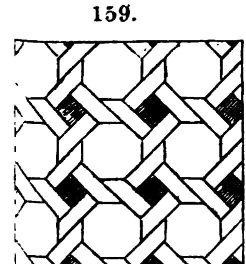
Если же неизмѣнно разстояніе BC и стороны BD и DC, то неизмѣненъ и треугольникъ BDC. Слѣдовательно, весь параллелограммъ неподвиженъ въ своихъ частяхъ.

414. Можно ли составить паркетъ изъ правильныхъ треугольниковъ? четыреугольниковъ? пятиугольниковъ? шестиугольниковъ? восьмиугольниковъ?

415. Составить рисунокъ паркета изъ ромбовъ и правильныхъ шестиугольниковъ такъ, чтобы шесть равныхъ ромбовъ располагались острыми углами у одной вершины, и шестиугольники окружали бы фигуру, составленную изъ ромбовъ.

416. Къ данному треугольнику присоединить ему равный такъ, чтобы получился параллелограммъ.

159.



158.

417. Назвать фигуры на рисункахъ паркета (черт. 158 и 159) и опредѣлить величины всѣхъ угловъ, встрѣчающихся въ фигурахъ.

418. Какъ построить на землѣ прямоугольникъ, котораго стороны 60 и 40 саж.?

419. Какъ намѣтить мѣста для посадки фруктовыхъ деревъ, чтобы разстояніе между ближайшими деревьями было 3 сажени? Деревья можно расположить двумя способами: квадратами и треугольниками.

420. Дана трапеція. Построить правильный треугольникъ, квадратъ, ромбъ съ угломъ въ 45°, прямоугольникъ съ основаніемъ вдвое болѣе высоты чтобы периметръ всѣхъ этихъ фигуръ равнялся периметру данной трапеціи.

421. Построить квадратъ по данной діагонали.

422. Построить ромбъ по двумъ діагоналямъ.

423. Построить параллелограммъ по двумъ діагоналямъ и сторонѣ.

424. Построить параллелограммъ по двумъ діагоналямъ и углу между ними.

425. Построить прямоугольникъ по данной сторонѣ и діагонали.

426. Одинъ изъ угловъ параллелограмма 75°. Найти величину остальныхъ

427. Построить четыреугольникъ, когда даны всѣ четыре стороны и діагональ.

428. Въ прямоугольникѣ найти точку, равноотстоящую отъ его вершинъ

429. Доказать: діагонали дѣлятъ ромбъ на четыре равныхъ треугольника.

430. Найти въ квадратѣ точку, равноотстоящую отъ всѣхъ его сторонъ

431. Какой длины должна быть сторона квадрата, если его периметръ равенъ периметру прямоугольника, у котораго стороны 50 и 30 саж.?

432. Построить прямоугольникъ по данной сторонѣ и одному изъ угловъ между діагоналями.

433. Построить прямоугольникъ, когда одна сторона дана, а другая вдвое меньше діагонали (§ 368).

434. Построить ромбъ по высотѣ и углу.

435. Построить равнобокую трапецію по основаніямъ и высотѣ.

436. Построить четыреугольникъ, у котораго смежныя стороны попарно равны. Даны длины этихъ сторонъ и уголъ, образуемый одной парой равныхъ сторонъ. Доказать, что въ этомъ четыреугольникѣ (дельтоидъ) діагонали перпендикулярны и одна изъ нихъ дѣлитъ углы пополамъ.

VIII.

Построеніе равныхъ и симметричныхъ фигуръ.

437. Часть плоскости, ограниченная со всѣхъ сторонъ линіями называется *фигурой.*

Фигуры, ограниченныя прямыми линіями, называются *прямолинейными* или, какъ мы говорили—многоугольниками; фигуры, ограниченныя кривыми линіями, *криволинейными* (напр. кругъ—криволинейная фигура).

438. *Равными фигурами называются такія, которыя при наложеніи совпадаютъ.*

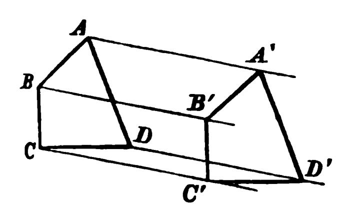
Въ равныхъ фигурахъ стороны и углы одной порознь равны сторонамъ и угламъ другой.

439. **Можно строить фигуры, равныя даннымъ, разными способами.**

1) *Способъ параллельныхъ линій.*

Положимъ, требуется построить фигуру, равную данной ABCD (черт. 160). Проводимъ произвольную прямую AA′, а затѣмъ линіи BB′, CC′, DD′, равныя и параллельныя прямой AA′. Соединивъ точки A′, B′, C′ и D′ прямыми, получимъ фигуру A′B′C′D′, равную ABCD. Въ самомъ дѣлѣ: стороны A′B′, B′C′, C′D′ и A′D′ равны и параллельны сторонамъ данной фигуры (§ 247); углы A′, B′, C′ и D′ также равны порознь угламъ данной фигуры (§ 250). Слѣдовательно, фигура A′B′C′D′ равна ABCD.

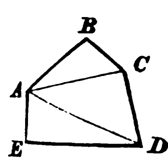
160.

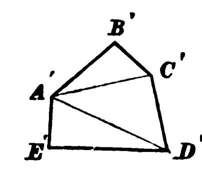


2) *Способъ треугольниковъ.*

Положимъ, надо построить фигуру, равную ABCDE (черт. 161). Проведя діагонали AC и AD, мы раздѣлимъ данную фигуру на треугольники. Затѣмъ, при помощи линейки и циркуля или линейки, циркуля и транспортира строимъ постепенно треугольники A′B′C′, равный ABC, A′C′D′, равный ACD и A′D′E′, равный ADE; такимъ образомъ и получимъ фигуру A′B′C′D′E′, равную данной ABCDE.

161.



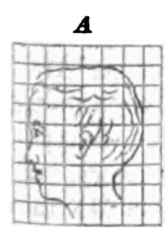


3) *Способъ квадратовъ.*

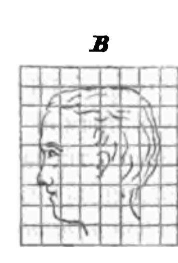
Пусть требуется построить фигуру, равную данной A (черт. 162). Часть плоскости, содержащую данную фигуру, разграфляютъ на квадраты двумя рядами параллельныхъ линій. На такіе же квадраты расчерчиваютъ плоскость B, на которой надо построить фигуру, равную данной. Затѣмъ, точки пересѣченія контура фигуры съ сѣткой A наносятъ на сѣтку B и черезъ эти точки проводятъ линіи, сходственныя съ линіями данной фигуры.

162.

A



B



Этотъ способъ часто употребляется художниками.

Примѣчаніе. Всѣ три указанные выше способа построенія равныхъ фигуръ въ теоріи точны (въ особенности два первые), но на практикѣ не совсѣмъ удобны, вслѣдствіе ошибокъ, которыя происходятъ отъ несовершенства чертежныхъ инструментовъ. Малѣйшія погрѣшности въ черченіи равныхъ угловъ, параллельныхъ линій, накопляясь понемногу, могутъ привести къ значительной ошибкѣ. На практикѣ примѣняются другіе болѣе удобные способы.

4) *Способъ вырѣзыванія по модели.*

Положимъ, на плоскости N (черт. 163) надо построить фигуру равную данной модели ABC. Для этого кладутъ модель ABC на плоскость N и по сторонамъ модели проводятъ линіи. Полученная такимъ образомъ фигура A′B′C′ равна данной модели. Затѣмъ, если надо, вырѣзываютъ полученную фигуру.

163.

Такой способъ употребляютъ портные, мѣдники и др.

Если модель не вырѣзана изъ плоскости, ее содержащей, то, положивъ модель на плоскость N, прокалываютъ ее въ различныхъ точкахъ контура и затѣмъ соединяютъ наколотыя точки линіями.

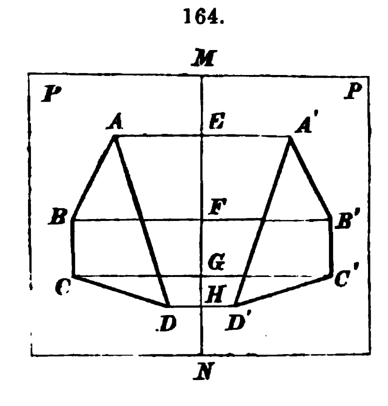
5) *Способъ припорашиванія.*

По этому способу весь узоръ или всю фигуру, которую надо начертить на данной плоскости, прокалываютъ по всѣмъ ея линіямъ; исколотый узоръ, или такъ называемый припорохъ, кладутъ на плоскость и посыпаютъ его угольнымъ порошкомъ; послѣдній, пройдя черезъ проколы, дастъ на данной плоскости вѣрный снимокъ узора. Чтобы не портить оригинала прокалываніемъ и порошкомъ, употребляютъ часто прозрачную бумагу (или коленкоръ). Ее накладываютъ на оригиналъ и срисовываютъ послѣдній по видимому контуру. Этотъ способъ очень часто употребляютъ инженеры и землемѣры для копированія плановъ, чертежей машинъ и т. п.

440. Пусть на плоскости P (черт. 164) дана фигура ABCD. Перегнемъ плоскость по какой нибудь прямой MN; по другую сторону этой линіи на плоскости P получится отпечатокъ данной фигуры— A′B′C′D′. Двѣ фигуры, расположенныя такимъ образомъ, какъ ABCD и A′B′C′D′, называются *симметричными*. Прямая MN называется *осью симметріи*. Всѣ сходственныя вершины симметричныхъ фигуръ (A и A′, B и B′ и т. д.) находятся въ равномъ разстояніи отъ оси симметріи.

441. Пусть требуется построить фигуру симметричную данной ABCD (черт. 164). Проведемъ въ той же плоскости произвольную прямую MN. Затѣмъ, изъ точекъ A, B, C и D опустимъ перпендикуляры на MN и на продолженіи ихъ отложимъ части EA′=EA, FB′=FB, GC′=GC и HD′=HD. Соединивъ точки A′, B′, C′, D′ прямыми, получимъ фигуру A′B′C′D′, симметричную ABCD.

164.



Части одной и той же фигуры могутъ быть симметричны, напр. узоры и рисунки украшеній обыкновенно составляютъ симметричныя фигуры.

442. При гравировкѣ и литографіи изображаютъ предметы сначала на бумагѣ въ ихъ настоящемъ видѣ и положеніи, а затѣмъ переводятъ рисунокъ на мѣдную доску или на камень въ обратномъ видѣ, такъ что лѣвая сторона дѣлается правой и наоборотъ, иначе, на доскѣ получается фигура, симметричная данной на бумагѣ. Эти доски, или такъ называемыя матрицы (клише), оттискиваютъ рисунокъ на бумагѣ или матеріи опять въ его настоящемъ видѣ.

Для книгопечатанія вырѣзываютъ буквы (штемпеля, пунсоны) въ обратномъ видѣ и пробиваютъ ими матрицы, такъ что въ этихъ послѣднихъ буквы получаются въ настоящемъ ихъ видѣ. Отлитыя въ матрицахъ буквы получаются опять въ обратномъ видѣ, а отпечатокъ послѣднихъ на бумагѣ дастъ буквы въ ихъ настоящемъ видѣ.

Упражненія. 443. Построить фигуру, равную данной, по способу a) параллельныхъ, b) треугольниковъ (цирк. и лин.), c) квадратовъ.

444. На двухъ листахъ прозрачной бумаги начерчены двѣ равныя фигуры. Какія фигуры мы увидимъ, если положимъ листы рядомъ, повернувъ одинъ изъ нихъ на изнанку?

445. Какую фигуру получимъ, если, сложивъ полотно или листъ бумаги вдвое, вырѣжемъ по модели какую нибудь фигуру и, затѣмъ, развернемъ сложенную матерію или бумагу?

446. Какъ можетъ поступить столяръ, если онъ долженъ выпилить изъ двухъ досокъ крышку для столика, имѣющую видъ симметричной фигуры?

447. Какъ можетъ поступить столяръ, если ему нужно выпилить изъ одной доски симметричную фигуру?

448. Можно ли назвать правильный многоугольникъ фигурой, симметричной въ своихъ частяхъ? а кругъ? а ромбъ?

449. Отыскать ось симметріи въ равнобедренномъ треугольникѣ.

450. Отыскать ось симметріи въ равностороннемъ треугольникѣ. Сколько можно отыскать такихъ осей?

451. Отыскать ось симметріи въ равнобокой трапеціи.

452. Отыскать ось симметріи въ прямоугольникѣ, ромбѣ, квадратѣ. Сколько осей симметріи имѣетъ каждая изъ этихъ фигуръ?

453. Отыскать ось симметріи въ правильномъ многоугольникѣ, кругѣ.

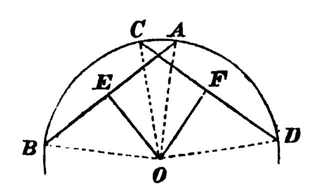
IX.

Линіи и углы въ кругѣ.

454. *Теорема. Если въ кругѣ двѣ хорды равны между собой, то онѣ равно отстоятъ отъ центра.*

Пусть хорда AB равна CD (черт. 165). Докажемъ, что разстояніе OE равно OF.

165.



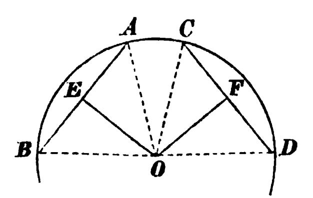
Дано: AB = CD
OE ⊥ AB, OF ⊥ CD.
Треб. док. OE = OF.

Проведя радіусы къ концамъ хордъ, получимъ треугольники AOB и COD, у которыхъ всѣ стороны одного равны порознь сторонамъ другаго; а потому △AOB = △COD; но въ равныхъ треугольникахъ равны ихъ высоты; слѣдовательно, OE = OF.

455. *Теорема* (обратная). *Если въ кругѣ двѣ хорды равно отстоятъ отъ центра, то онѣ равны между собой.*

Пусть разстоянія хордъ AB и CD (черт. 166) отъ центра O будутъ одинаковы, т. е. OE = OF. Докажемъ, что AB = CD.

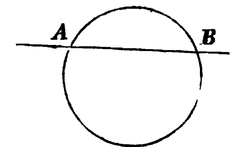
166.



Дано: OE ⊥ AB, OF ⊥ CD
OE = OF.
Треб. док. AB = CD.

Въ прямоугольныхъ треугольникахъ AOE и DOF гипотенузы и катеты одинаковы, а потому (§ 347) △AOE = △DOF, значитъ и AE = DF. Такъ же равны треугольники EOB и FOC; стало быть и EB = FC. Сложивъ равныя AE = DF съ равными EB = FC, получимъ AB = DC.

167.



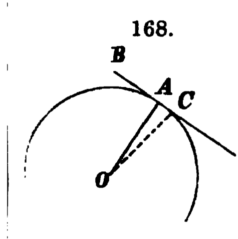
456. Если взять на окружности двѣ точки A и B (черт. 167) и провести черезъ нихъ прямую, то эта прямая будетъ имѣть съ окружностью двѣ общія точки. Прямая, имѣющая съ окружностью двѣ общія точки, называется *сѣкущей*.

457. Сѣкущая раздѣляетъ кругъ на двѣ части, которыя называются *сегментами*.

458. Часть же круга, ограниченная двумя радіусами и дугой, называется *секторомъ*.

459. *Теорема. Перпендикуляръ, возставленный изъ точки окружности къ радіусу, проведенному къ той же точкѣ, имѣетъ только одну общую точку съ окружностью.*

Пусть АВ перпендикулярна къ ОА (черт. 168). Докажемъ, что АВ имѣетъ съ окружностью только одну общую точку А.



На линіи АВ возьмемъ какую нибудь точку С и проведемъ прямую ОС. Такъ какъ ОА ⊥ АВ, то ОС—наклонна, а потому (§ 287) ОС > ОА, т. е. ОС больше радіуса. Стало быть, точка С должна лежать внѣ круга. То же самое можно сказать и о всякой другой точкѣ прямой АВ, за исключеніемъ точки А. Значитъ, всѣ точки прямой АВ лежатъ внѣ круга, кромѣ одной общей съ окружностью точки А.

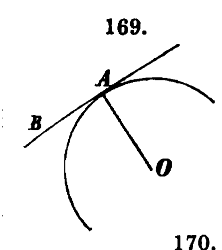
460. *Прямая, имѣющая съ окружностью одну общую точку, называется касательной, общая точка—точкой прикосновенія.*

Поэтому предъидущая теорема можетъ быть выражена такъ: *перпендикуляръ, возставленный изъ точки окружности къ радіусу, проведенному къ той же точкѣ, есть касательная къ окружности.*

461. *Теорема* (обратная). *Касательная перпендикулярна къ радіусу, проведенному къ точкѣ прикосновенія.*

Пусть АВ—касательная (черт. 169), а ОА—радіусъ, проведенный къ точкѣ прикосновенія А.

Докажемъ, что АВ ⊥ ОА.



Всѣ точки касательной, кромѣ точки прикосновенія А, лежатъ внѣ круга, а потому радіусъ ОА есть самая короткая изъ всѣхъ прямыхъ, которыя можно провести отъ центра до касательной; стало быть, ОА не можетъ быть наклонна къ касательной (§ 287); значитъ, ОА ⊥ АВ или АВ ⊥ ОА.

170.

462. Между точками А и В на прямой АВ возьмемъ произвольную точку С (черт. 170); принявъ за центръ точку А, радіусомъ АС опишемъ окружность; также радіусомъ ВС опишемъ окружность, принявъ за центръ точку В. Полученныя такимъ образомъ окружности имѣютъ только одну общую точку С. Въ самомъ

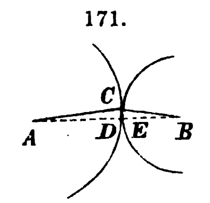
дѣлѣ: если изъ точки C возставить перпендикуляръ къ AB, то онъ будетъ линіей касательной къ обѣимъ окружностямъ (§ 459), которыя расположены по разныя стороны этой касательной и потому нигдѣ встрѣтиться не могутъ, кромѣ общей точки прикосновенія.

463. Окружности, имѣющія одну общую точку, называются *касательными одна къ другой*. Можно построить касательныя окружности одну внѣ другой и одну въ другой.

464. *Теорема. Центры и точки прикосновенія двухъ касательныхъ окружностей лежатъ на одной прямой.*

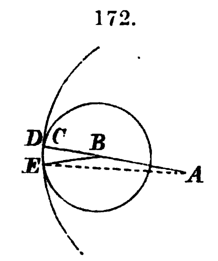
Разсмотримъ два случая: 1) окружности касательны извнѣ (черт. 171). Предположимъ, что точка прикосновенія C находится внѣ прямой AB, на которой лежатъ центры A и B; посмотримъ теперь, что выйдетъ изъ этого предположенія. Прямая AB должна быть больше суммы радіусовъ, потому что AB состоитъ изъ двухъ радіусовъ и еще разстоянія DE между окружностями; ломаная AC+CB равна суммѣ радіусовъ. Выходитъ, что прямая AB больше ломаной AC+CB, что невозможно. Слѣдовательно, нельзя предположить, что точка прикосновенія и центры касательныхъ окружностей лежатъ не на одной прямой.

171.



2) Окружности касательны изнутри (черт. 172). Положимъ, что точка прикосновенія E лежитъ внѣ прямой AB, на которой находятся центры касательныхъ окружностей. Тогда AB+BC < AD; подставивъ вмѣсто BC и AD другіе радіусы этихъ окружностей BE и AE, получимъ: AB+BE < AE, т. е. что ломаная меньше прямой между тѣми же точками, а это невозможно. Слѣдовательно, нельзя предположить, что точка прикосновенія и центры касательныхъ окружностей лежатъ не на одной прямой.

172.



465. *Уголъ, который образуется двумя хордами, проведенными отъ одной точки окружности, называется вписаннымъ угломъ.*

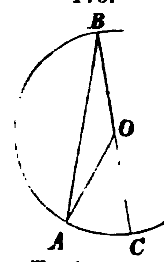
Центръ круга можетъ быть относительно вписаннаго угла въ одномъ изъ трехъ положеній: 1) центръ можетъ находиться на одной изъ сторонъ вписаннаго угла, 2) центръ можетъ быть внутри угла и 3) онъ можетъ лежать внѣ угла.

Всякому вписанному углу соотвѣтствуетъ дуга, которая находится между его сторонами.

466. *Теорема. Всякій вписанный уголъ равенъ половинѣ центральнаго съ той же дугой.*

1) Пусть центръ круга O лежитъ на сторонѣ вписаннаго угла ABC (черт. 173). Докажемъ, что $\angle ABC = \frac{\angle AOC}{2}$.

173.



Треб. док. $\angle ABC = \frac{\angle AOC}{2}$.

Уголъ AOC — внѣшній для треугольника ABO и потому $\angle AOC = \angle ABC + \angle OAB$ (§ 334); но такъ какъ $\triangle ABO$ равнобедренный (OA и OB радіусы), то $\angle ABC = \angle OAB$; значитъ, каждый изъ этихъ угловъ равенъ половинѣ угла AOC.

И такъ, $\angle ABC = \frac{\angle AOC}{2}$.

2) Пусть центръ круга лежитъ внутри вписаннаго угла ABC (черт. 174).

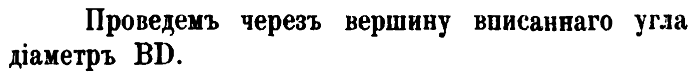
Докажемъ, что $\angle ABC = \frac{\angle AOC}{2}$.

174.

Треб. док. $\angle ABC = \frac{\angle AOC}{2}$.

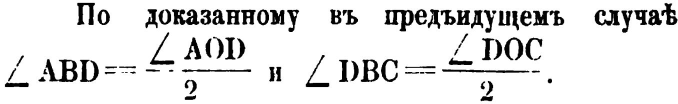
Проведемъ черезъ вершину вписаннаго угла діаметръ BD.

По доказанному въ предъидущемъ случаѣ

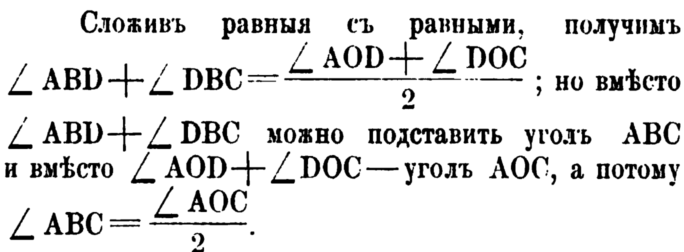


$\angle ABD = \frac{\angle AOD}{2}$ и $\angle DBC = \frac{\angle DOC}{2}$.

Сложивъ равныя съ равными, получимъ



$\angle ABD + \angle DBC = \frac{\angle AOD + \angle DOC}{2}$; но вмѣсто



$\angle ABD + \angle DBC$ можно подставить уголъ ABC и вмѣсто $\angle AOD + \angle DOC$ — уголъ AOC, а потому $\angle ABC = \frac{\angle AOC}{2}$.

3) Пусть центръ круга находится внѣ вписаннаго угла ABC (черт. 175).

Докажемъ, что $\angle ABC = \frac{\angle AOC}{2}$.

175.

Треб. док. $\angle ABC = \frac{\angle AOC}{2}$.

Проведемъ черезъ вершину вписаннаго угла діаметръ BD.

По первому случаю имѣемъ: $\angle ABD = \frac{\angle AOD}{2}$ и $\angle CBD = \frac{\angle COD}{2}$.

Вычтемъ изъ равныхъ поровну, получимъ:

$\angle ABD - \angle CBD = \frac{\angle AOD - \angle COD}{2}$; подставимъ вмѣсто $\angle ABD - \angle CBD$ уголъ ABC, а вмѣсто $\angle AOD - \angle COD$ — уголъ AOC, тогда выйдетъ, что $\angle ABC = \frac{\angle AOC}{2}$.

467. *Слѣдствіе* 1. ***Вписанный уголъ измѣряется половиной дуги между его сторонами.***

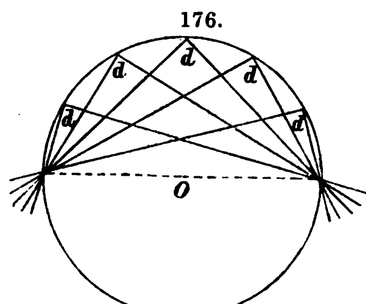
468. *Слѣдствіе* 2. ***Сумма двухъ вписанныхъ угловъ, опирающихся на хорду съ разныхъ ея сторонъ, равна*** 2d.

469. *Слѣдствіе* 3. ***Всѣ вписанные углы, соотвѣтствующіе одной дугѣ или равнымъ дугамъ, равны между собой,*** потому что имѣютъ одну мѣру.

Это предложеніе можетъ быть выражено такъ: ***изъ каждой точки дуги концы хорды видны подъ однимъ и тѣмъ же угломъ.***

470. *Слѣдствіе* 4. ***Вписанный уголъ, котораго стороны проходятъ черезъ концы діаметра, равенъ прямому*** (черт. 176), потому что дуга между его сторонами равна половинѣ окружности — 180° и слѣдовательно мѣра его будетъ 90° (§ 467).

176.



Можно сказать, что ***изъ каждой точки окружности концы діаметра видны подъ прямымъ угломъ.***

---

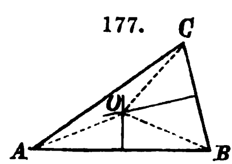
471. Когда окружность проходитъ черезъ всѣ вершины какого нибудь многоугольника, то ее называютъ окружностью, ***описанною*** около этого многоугольника.

Когда всѣ стороны какого нибудь многоугольника суть касательныя къ окружности, то говорятъ, что окружность ***вписана*** въ этотъ многоугольникъ.

472. *Теорема.* ***Около всякаго треугольника можно описать окружность.***

Пусть будетъ треугольникъ ABC (черт. 177). Докажемъ, что можно провести окружность черезъ всѣ вершины этого треугольника.

177.



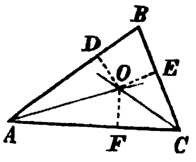
Изъ серединъ двухъ сторонъ AB и CB возставимъ къ нимъ перпендикуляры; положимъ, что эти перпендикуляры пересѣкутся въ точкѣ O. Точка O и будетъ центромъ окружности, которую можно описать около даннаго треугольника. Въ самомъ дѣлѣ: точка O принадлежитъ перпендикуляру, возставленному изъ середины стороны AB, поэтому она находится въ равномъ разстояніи отъ вершинъ A и B (§ 292), т. е. OA = OB; та же точка O принадлежитъ и перпендикуляру, возставленному изъ середины стороны CB, значитъ, она равно удалена отъ вершинъ C и B, или OC = OB. Выходитъ, что точка O равно удалена отъ всѣхъ трехъ

вершинъ А, В и С, т. е. ОА=ОВ=ОС. Слѣдовательно, если мы примемъ точку О за центръ и радіусомъ ОА опишемъ окружность, то эта окружность должна пройти чрезъ всѣ три вершины А, В и С.

473. *Теорема. Во всякій треугольникъ можно вписать окружность.*

Пусть данъ треугольникъ АВС (черт. 178). Докажемъ, что можно описать окружность, къ которой всѣ стороны треугольника будутъ касательными.

178.



Раздѣлимъ два угла А и С пополамъ; положимъ, что равнодѣлящія этихъ угловъ пересѣкутся въ точкѣ О. Точка О и будетъ центромъ окружности, которую можно вписать въ данный треугольникъ.

Чтобы доказать это, опустимъ изъ точки О перпендикуляры на стороны треугольника: OD ⊥ AB, OE ⊥ BC и OF ⊥ AC.

Разсмотримъ теперь прямоугольные треугольники ODA и OFA. Они имѣютъ общую гипотенузу ОА и по равному острому углу DAO и FAO (уголъ А раздѣленъ пополамъ). Значитъ, △ODA=△OFA (§ 346), а потому OD=OF. Треугольники OEC и OFC тоже прямоугольные и тоже имѣютъ общую гипотенузу и по равному острому углу. Стало быть, △OEC=△OFC и OE=OF.

И такъ, мы доказали, что OD=OF=OE. Слѣдовательно, если принять точку О за центръ и радіусомъ OD описать окружность, то она должна пройти черезъ точки D, E и F, а такъ какъ стороны треугольника перпендикулярны къ радіусамъ OD, OE и OF, то онѣ будутъ касательными къ окружности.

474. *Теорема. Если въ правильномъ многоугольникѣ два угла при одной сторонѣ раздѣлить пополамъ и точку пересѣченія равнодѣлящихъ соединить со всѣми вершинами, то весь многоугольникъ раздѣлится на равнобедренные и равные треугольники.*

Пусть будетъ правильный многоугольникъ ABCDE (черт. 179), его углы А и В раздѣлены пополамъ, и точка О, въ которой пересѣкаются равнодѣлящія АО и ВО, соединена со всѣми вершинами.

179.

Докажемъ, что треугольники АОВ, ВОС, COD и т. д.—всѣ равнобедренные и равны между собой.

Въ треугольникѣ ВОА углы ОВА и ОАВ равны между собой, потому что каждый изъ нихъ есть половина угла правильнаго многоугольника. Если же въ треугольникѣ два угла одинаковы, то онъ равнобедренный (§ 339); значитъ, △ВОА—равнобедренный. Разсмотримъ теперь

треугольники BOA и BOC. Въ нихъ сторона OB—общая, стороны AB и BC равны, какъ стороны правильнаго многоугольника, и $\angle OBA = \angle OBC$ (уголъ B раздѣленъ пополамъ). Выходитъ, что $\triangle BOA = \triangle BOC$ (§ 169); но такъ какъ первый изъ нихъ равнобедренный, то и второй долженъ быть равнобедренный. Замѣтивъ, что въ равнобедренномъ треугольникѣ уголъ OCB равенъ OBC, т. е. половинѣ угла правильнаго многоугольника, разсмотримъ треугольники BOC и COD. У нихъ сторона OC—общая, $BC = CD$, какъ стороны правильнаго многоугольника, и $\angle OCB = \angle OCD$, потому что первый изъ этихъ угловъ есть половина угла правильнаго многоугольника, а оба вмѣстѣ они составляютъ цѣлый уголъ правильнаго многоугольника и потому второй уголъ есть тоже половина угла правильнаго многоугольника. И такъ, $\triangle BOC = \triangle COD$. Стало быть, $\triangle COD$—тоже равнобедренный и $\angle ODC = \angle OCD$, т. е. $\angle ODC$ есть половина угла правильнаго многоугольника. Замѣтивъ это, разсмотримъ треугольники COD и DOE и докажемъ ихъ равенство.

Разсуждая по предъидущему, мы, наконецъ, найдемъ, что

$$\triangle AOB = \triangle BOC = \triangle COD = \triangle DOE = \triangle EOA$$

и что всѣ эти треугольники равнобедренные.

475. *Слѣдствіе* 1. *Около всякаго правильнаго многоугольника можно описать окружность.* Изъ равенства равнобедренныхъ треугольниковъ AOB, BOC и т. д. (черт. 180) найдемъ, что $OA = OB = OC = OD = OE$, а потому, если принять за центръ точку O и радіусомъ OA описать окружность, то она должна пройти черезъ всѣ вершины A, B, C, D и E.

476. *Слѣдствіе* 2. *Во всякій правильный многоугольникъ можно вписать окружность.* Въ равныхъ треугольникахъ AOB, BOC и т. д. (черт. 180) должны быть равны и ихъ высоты. Стало быть, перпендикуляры, опущенные изъ точки O на всѣ стороны правильнаго многоугольника, будутъ равны между собой, т. е. $OF = OG = OH$ и т. д. Поэтому, если принять точку O за центръ и радіусомъ OF описать окружность, то она пройдетъ черезъ точки F, G, H и т. д., и всѣ стороны правильнаго многоугольника будутъ касательными къ этой окружности.

180.

477. Обыкновенно радіусъ круга, вписаннаго въ правильный многоугольникъ, называется *апоѳемой*. Апоѳема дѣлитъ сторону правильнаго многоугольника пополамъ (§ 293).

478. *Теорема. Сторона правильнаго шестиугольника равна радіусу описаннаго круга.*

Пусть около правильнаго шестиугольника (черт. 181) описана окружность. Докажемъ, что сторона шестиугольника AB равна радіусу OA.

181.

Центральный уголъ AOB равенъ 360°: 6=60°; значитъ, остальные два угла треугольника OAB равны 180° — 60° = 120°; но такъ какъ треугольникъ OAB равнобедренный, то углы A и B должны быть равны и, стало быть, каждый по 120°: 2=60°. И такъ, выходитъ, что всѣ три угла треугольника по 60°; слѣдовательно, этотъ треугольникъ равносторонній (§ 340), а потому AB=OA.

Упражненія. 479. Построить въ данномъ кругѣ двѣ равныя хорды данной длины и показать ихъ разстоянія отъ центра.

480. На данномъ разстояніи отъ центра даннаго круга провести двѣ параллельныя и двѣ перпендикулярныя къ нимъ хорды.

481. Черезъ точку, данную внутри круга, провести хорду такъ, чтобы она въ этой точкѣ дѣлилась пополамъ.

482. Опредѣлить длину наибольшей хорды въ окружности, радіусъ которой 5 дюймовъ.

483. Въ какомъ случаѣ секторъ и сегментъ одного круга представляютъ одно и то же?

484. Провести окружность, касательную къ данной прямой въ данной точкѣ. Сколько такихъ окружностей можно провести?

485. Какъ располагаются центры всѣхъ окружностей, касательныхъ къ данной прямой съ обѣихъ ея сторонъ въ данной на этой прямой точкѣ?

486. Провести съ обѣихъ сторонъ прямой касательныя къ ней окружности въ данной на прямой точкѣ данными радіусами.

487. Изъ даннаго центра описать окружность касательную къ данной прямой.

488. Какъ располагаются центры всѣхъ окружностей одного радіуса касательныхъ къ данной прямой?

489. Кругъ катится по прямой линіи. Какую линію описываетъ центръ этого круга?

490. Кругъ катится по окружности другаго круга. Какую линію описываетъ центръ катящагося круга?

491. Провести окружность черезъ точку C (черт. 182) такъ, чтобы она была касательна къ прямой AB въ точкѣ A.

182.

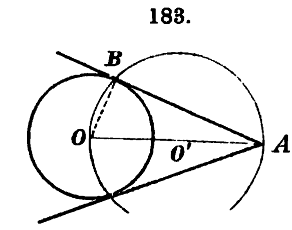
492. Провести прямую, касательную къ данной окружности, черезъ взятую на ней точку.

493. Какое разстояніе между касательной и центромъ круга?

494. Провести касательную къ окружности параллельно данной въ окружности хордѣ.

495. Дана окружность и точка A внѣ ея (черт. 183). Провести черезъ эту точку прямую касательную къ данной окружности.

183.



Построеніе. Раздѣливъ прямую AO пополамъ, примемъ O′—середину AO—за центръ и опишемъ окружность радіусомъ, равнымъ O′A. Черезъ точку пересѣченія этой окружности съ данной и точку A проведемъ прямую BA, которая и будетъ касательная къ данной окружности.

Доказательство. Проведемъ радіусъ OB. Уголъ OBA—есть вписанный уголъ, стороны котораго BO и BA проходятъ черезъ концы діаметра OA; значитъ (§ 470), уголъ OBA прямой, или $BA \perp OB$; а если $BA \perp OB$, то BA есть касательная (§ 459).

496. Доказать: прямая, проведенная черезъ центръ круга O и внѣшнюю точку A, дѣлитъ пополамъ уголъ между касательными къ окружности, проведенными отъ внѣшней точки A.

497. Доказать: радіусъ, проведенный черезъ середину хорды, перпендикуляренъ къ ней.

498. Въ данномъ кругѣ провести хорду данной длины параллельно данной прямой.

499. Изъ точки, данной на окружности, провести хорду на данномъ разстояніи отъ центра.

500. Черезъ данную точку провести сѣкущую къ данному кругу на данномъ разстояніи отъ центра.

501. Чрезъ данную точку провести къ данному кругу сѣкущую такъ, чтобы образовалась хорда данной длины.

502. Изъ данной точки описать окружность, касательную къ данному кругу.

503. Даны двѣ точки. Описать двѣ касательныя извнѣ одна къ другой окружности такъ, чтобы данныя точки были ихъ центрами.

504. Даны двѣ точки. Описать двѣ окружности, касательныя одна къ другой изнутри такъ, чтобы данныя точки были ихъ центрами.

505. Даннымъ радіусомъ описать окружность, центръ которой находился бы на данной прямой и которая касалась бы даннаго круга.

506. Даннымъ радіусомъ описать окружность, касательную къ данной прямой и къ данному кругу.

507. Провести касательную къ данному кругу перпендикулярно къ данной прямой.

508. Дана окружность и на ней точка A. Описать даннымъ радіусомъ другую окружность, касательную къ первой въ точкѣ A.

509. Даны окружность, на ней точка A и внѣ ея точка B. Провести окружность, касательную къ данной въ точкѣ A, чтобы она прошла черезъ точку B.

510. Даны окружность, на ней точка A и внутри ея точка B. Описать окружность, касательную къ данной въ точкѣ A, чтобы она проходила черезъ точку B.

511. Описать окружность даннымъ радіусомъ такъ, чтобы она находилась отъ двухъ данныхъ точекъ въ данныхъ разстояніяхъ.

512. Описать окружность даннымъ радіусомъ такъ, чтобы она находилась отъ данной точки и отъ данной прямой въ данныхъ разстояніяхъ.

513. Провести прямую касательную къ двумъ даннымъ окружностямъ.

514. Описать даннымъ радіусомъ окружность, касательную къ двумъ даннымъ кругамъ.

515. Найти окружности, касательныя къ обѣимъ сторонамъ даннаго угла.

516. Даннымъ радіусомъ описать окружность, касательную къ сторонамъ даннаго угла.

517. Даны прямая, окружность и точка на прямой. Описать окружность, касательную къ данной окружности и къ прямой въ данной на ней точкѣ.

518. Даны прямая, окружность и точка на ней. Описать окружность, касательную къ данной прямой и къ окружности въ данной точкѣ.

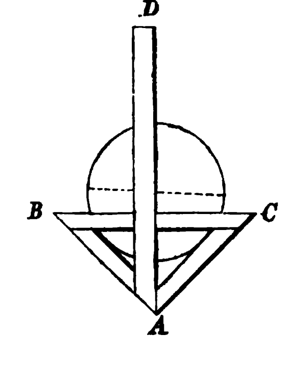
519. Даннымъ радіусомъ описать окружность, центръ которой лежалъ бы на данной прямой, и которая касалась бы другой данной прямой.

520. Даны окружность и прямая внѣ ея. Найти наименьшее разстояніе отъ окружности до прямой.

521. Найти центръ данной окружности.

Примѣчаніе. Для отысканія центровъ на круглыхъ предметахъ употребляется особый инструментъ (черт. 184). Онъ состоитъ изъ треугольника ABC и линейки AD, которой ребро AD дѣлитъ $\angle$ BAC пополамъ. Планки AB и AC нѣсколько толще остальныхъ частей этого инструмента.

184.



Когда нужно найти центръ на кругломъ предметѣ, прикладываютъ инструментъ такъ, чтобы онъ упирался въ окружность предмета толстыми планками AB и AC, и зачерчиваютъ по ребру AD линію; эта линія должна пройти черезъ центръ окружности. Если произвести означенное дѣйствіе два раза, то пересѣченіе линій и будетъ искомый центръ.

522. Дана дуга нѣкоторой окружности; начертить всю окружность.

523. Доказать: общая хорда двухъ пересѣкающихся окружностей перпендикулярна къ прямой, соединяющей ихъ центры, и дѣлится этой прямой пополамъ.

524. Описать окружность даннымъ радіусомъ такъ, чтобы она, пересѣкая данную прямую, отрѣзала хорду данной длины.

525. Описать окружность, касательную къ двумъ параллельнымъ прямымъ.

526. Даны двѣ параллельныя прямыя и точка между ними. Описать окружность, касательную къ этимъ прямымъ и проходящую черезъ данную точку.

527. Даны двѣ прямыя и точка на одной изъ нихъ. Описать окружность, касательную къ этимъ прямымъ и къ одной изъ нихъ въ данной точкѣ.

528. Описать всѣ окружности, касательныя къ сторонамъ треугольника и ихъ продолженіямъ (каждая окр. касат. къ тремъ прямымъ).

529. Вписанный уголъ равенъ $48^0\ 30'$. Какой величины уголъ центральный, соотвѣтствующій той же дугѣ?

530. Къ кругу проведены двѣ касательныя, образующія уголъ 40^0. Опредѣлить число градусовъ дугъ между точками прикосновенія (провести радіусы къ точкамъ прикосновенія).

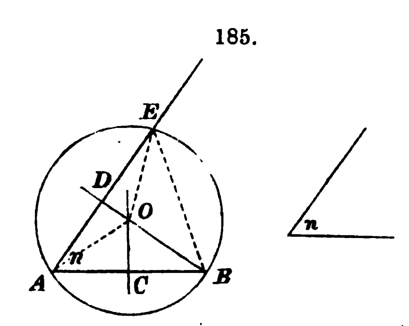
531. Изъ точки внѣ круга проведены двѣ касательныя такъ, что меньшая изъ дугъ между точками прикосновенія равна 36^0. Какой уголъ между касательными?

532. Построить въ кругѣ прямой уголъ такъ, чтобы его вершина была на окружности.

533. Построить прямоугольный треугольникъ по данной гипотенузѣ и по перпендикуляру, опущенному на нее изъ вершины прямаго угла.

534. Найти нѣсколько такихъ точекъ, изъ которыхъ прямая данной длины видна подъ прямымъ угломъ.

535. Принимая данную прямую AB (черт. 185) за хорду, провести такую дугу, чтобы каждый вписанный въ нее уголъ, опирающійся сторонами въ концы хорды, былъ равенъ данному углу *n*.



Построеніе. На прямой AB при точкѣ A построимъ уголъ EAB, равный углу *n*; изъ точки B опустимъ перпендикуляръ BD на AE; черезъ середину данной прямой C проведемъ CO, перпендикулярную къ AB; точку пересѣченія перпендикуляровъ O примемъ за центръ и радіусомъ OB опишемъ окружность. Дуга AEB и будетъ искомая.

Доказательство. Такъ какъ $OA=OE$, то $DA=DE$, а потому и $BA=BE$. Стало быть, $\triangle ABE$ равнобедренный; выходитъ, что $\angle AEB=\angle EAB=\angle n$; всякій другой вписанный уголъ, соотвѣтствующій дугѣ AB, будетъ равенъ данному углу n (§ 469).

536. Если уголъ n въ предъидущей задачѣ прямой, то гдѣ пересѣкутся перпендикуляры, опредѣляющіе центръ искомой дуги? Гдѣ пересѣкутся перпендикуляры, если $\angle n$ — тупой?

537. Найти тѣ точки, изъ которыхъ прямая данной длины видна подъ однимъ и тѣмъ же даннымъ угломъ.

186.

538. Найти точку, изъ которой концы прямыхъ AB и CD (черт. 186) видны подъ прямымъ угломъ.

539. На данной прямой найти такую точку, чтобы прямыя, проведенныя отъ нея къ концамъ другой данной прямой, составили бы уголъ, равный данному.

540. Хорда дѣлитъ окружность на двѣ части, изъ которыхъ одна въ 3 раза больше другой. Какой величины вписанные углы, опирающіеся на эту хорду?

541. Какой длины будетъ прямая, соединяющая вершину прямаго угла съ серединой гипотенузы?

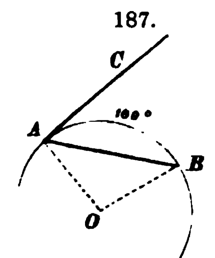
542. Построить треугольникъ по основанію, высотѣ и углу противъ основанія.

543. На данномъ основаніи построить треугольникъ, вершина котораго находилась бы на данной прямой, а уголъ при вершинѣ былъ бы равенъ данному.

544. Доказать: дуги и хорды, заключенныя между параллельными хордами, равны между собой.

545. Доказать: если двѣ дуги круга равны между собой, то равны и ихъ хорды (построить центральные углы); но если дугу удвоить, то хорда не удвоится.

187.



546. Хорда AB (черт. 187) отдѣляетъ дугу въ 100^0; отъ конца хорды проведена касательная AC. Опредѣлить величину угла между касательной и хордой ($\angle CAB$).

547. Уголъ между касательной и хордой равенъ 35^0. Опредѣлить число градусовъ въ дугахъ, образуемыхъ хордой.

548. Найти сумму противолежащихъ угловъ у вписаннаго въ кругъ четыреугольника.

549. Въ данномъ треугольникѣ вписать кругъ.

550. Около даннаго треугольника описать окружность.

551. Въ какомъ треугольникѣ центръ описаннаго круга лежитъ на сторонѣ?

552. Около какихъ параллелограммовъ можно описать окружность?

553. Въ какіе параллелограммы можно вписать кругъ?

554. Около круга описать квадратъ.

555. Въ кругъ вписать правильный шестиугольникъ, восьмиугольникъ.

556. Построить правильный шестиугольникъ и на его сторонахъ правильные треугольники.

557. Построить правильный восьмиугольникъ по данной сторонѣ.

558. Вписать въ кругъ правильный двѣнадцатиугольникъ.

559. Описать около круга правильный треугольникъ.

560. Составить рисунокъ паркета изъ правильныхъ восьмиугольниковъ и квадратовъ.

561. Дана половина круга. Вписать въ окружность, касательную къ діаметру и къ дугѣ въ данной на ней точкѣ.

562. Въ данномъ круговомъ секторѣ вписать кругъ, касательный дугѣ и радіусамъ.

563. Въ данномъ кругѣ вписать три равныхъ круга, которые касались бы даннаго и одинъ другаго.

564. Въ данномъ кругѣ вписать шесть равныхъ круговъ, которые касались бы даннаго и одинъ другаго.

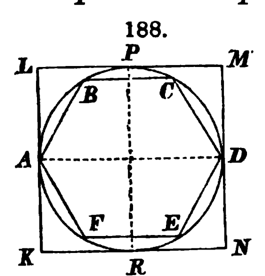
565. Около даннаго круга описать четыре равныхъ круга, которые касались бы даннаго и одинъ другаго; описать шесть такихъ круговъ.

X.

Измѣреніе длины окружности.

566. *Теорема. Длина окружности болѣе трехъ и менѣе четырехъ діаметровъ.*

188.



Впишемъ въ какой нибудь кругъ правильный шестиугольникъ ABCDEF (черт. 188).

Каждая сторона шестиугольника равна радіусу описаннаго круга (§ 478); стало быть, периметръ шестиугольника равенъ шести радіусамъ или тремъ діаметрамъ. Но дуга AB болѣе хорды AB, потому что прямая короче кривой, ограниченной тѣми же точками. Точно также дуга BC больше хорды BC, дуга CD больше хорды CD и т. д. Отсюда слѣдуетъ, что вся окружность больше периметра шестиугольника, или больше трехъ діаметровъ.

Опишемъ теперь около того же круга квадратъ KLMN. Каждая сторона этого квадрата равна діаметру круга (какъ части параллельныхъ между параллельными), а потому периметръ квадрата равенъ четыремъ діаметрамъ. Но дуга AP меньше ломаной ALP (§ 34); точно также и дуга DP меньше ломаной PMD и т. д. Такимъ образомъ найдемъ, что вся окружность меньше периметра квадрата, или меньше четырехъ діаметровъ.

567. Мы доказали, что длина окружности вмѣщаетъ въ себѣ три съ лишкомъ діаметра. Въ подробныхъ курсахъ геометріи доказывается, что число діаметровъ, умѣщающихся по длинѣ окружности, приблизительно равно 3,14 или $\frac{22}{7}$. Для болѣе точныхъ вычисленій можно брать числа 3,1416 или $\frac{355}{113}$ *).

568. Обыкновенно длина радіуса обозначается буквою R, длина діаметра — 2R. Число, показывающее во сколько разъ окружность длиннѣе діаметра, обозначается всегда греческой буквой π (*пи*). По этому длина окружности должна быть выражена такъ: $2R \times \pi$ или, какъ всегда пишутъ, $2\pi R$.

Эта *формула* показываетъ, что для полученія длины окружности, когда данъ ея радіусъ, достаточно перемножить три числа: 2, π и R. Если, напримѣръ, радіусъ = 5 дюйм., то длина окружности равна $2 \times 3{,}14 \times 5$ дюйм. или 31,4 дюйм.

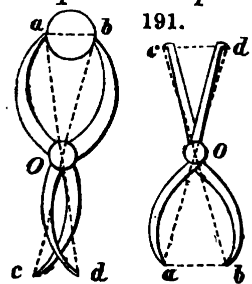
569. Для измѣренія толщины предметовъ или діаметровъ трубокъ и проволокъ употребляются обыкновенно *кронциркули*. Простѣйшій кронциркуль представленъ на чертежѣ 189. Концами ножекъ *a* и *b* этого кронциркуля охватываютъ измѣряемый предметъ, а затѣмъ, не измѣняя положенія ножекъ, измѣряютъ разстояніе между ними, прикладывая кронциркуль къ аршину, футу или сантиметру.

189. 190.

a b

Для измѣренія ширины отверстія употребляется такъ называемый *нутромѣръ* (черт. 190).

Иногда соединяютъ простой кронциркуль съ нутромѣромъ въ одинъ инструментъ (черт. 191), называемый *двухстороннимъ кронциркулемъ*.



191.

Ножки *a* и *b* (черт. 191) служатъ для наружнаго обмѣра, а *c* и *d* для внутренняго. Если всѣ четыре конца *a*, *b*, *c* и *d* одинаково удалены отъ оси O, то сколько будетъ раздвинута одна пара ножекъ, на столько же будетъ раздвинута и другая пара, т. е. разстояніе *ab* будетъ равно *cd*; это слѣдуетъ изъ равенства треугольниковъ *aob* и *cod*.

*) Неточность первыхъ двухъ чиселъ (3,14 и $\frac{22}{7}$) менѣе $\frac{1}{500}$ единицы, третьяго — менѣе 0,00001, а четвертаго менѣе 0,000001.

Упражненія. 570. Вычислить длину окружности, радіусъ которой равенъ 4 вершкамъ, $3\frac{1}{2}$ дюйм., 4,5 фут.

571. Опредѣлить длину окружности, діаметръ которой равенъ 1,75 дюйм., $1\frac{1}{2}$ вершк., 1 аршину.

572. Выпрямить данную окружность, т. е. провести прямую, приблизительно равную окружности даннаго круга (§ 567).

573. Какой длины діаметръ круга, если его окружность равна 11 дюйм., 15,7 вершк., 5 ф. 9 дюйм.?

574. Каждый градусъ окружности равенъ 1 лин. Какой длины радіусъ этой окружности?

575. Какой длины радіусъ круга, если каждый градусъ окружности равенъ 1 дюйму?

576. Желаютъ вырыть круглый прудъ 100 арш. въ окружности. Во сколько аршинъ и вершк. нужно взять радіусъ, чтобы очертить мѣсто для пруда?

577. Какой длины дуга въ 1^{0}, если она описана радіусомъ 20 дюймовъ?

578. Какой длины дуга въ 75^{0}, если она описана радіусомъ въ 12 вершк.?

579. Около правильнаго шестиугольника описана окружность. На сколько сторона шестиугольника менѣе дуги, которую она стягиваетъ, если сторона шестиугольника равна 1 вершку?

580. Дуга въ 35^{0} равна $25\frac{2}{3}$ дюйма. Какой длины радіусъ этой дуги?

581. Сколько градусовъ въ дугѣ, длина которой $4\frac{5}{18}$ вершк., а радіусъ 5 вершк.?

582. Радіусъ одного круга равенъ 12 вершк., а другаго — 4 в. Во сколько разъ окружность одного круга больше окружности другаго?

583. Даны двѣ неравныя окружности. Рѣшить, во сколько разъ одна длиннѣе другой?

584. Колесо, пробѣжавъ разстояніе 8 саж. 5 фут., перевернулось 10 разъ. Какой длины поперечникъ этого колеса?

585. На каждой сторонѣ правильнаго шестиугольника построена половина круга. Вычислить обводъ этой криволинейной фигуры, если радіусъ круга, описаннаго около шестиугольника, равенъ 10 дюйм. Во сколько разъ обводъ больше окружности круга?

586. Каждый градусъ экватора земнаго шара около 105 верстъ. Какъ великъ радіусъ экватора?

587. Глобусъ имѣетъ полсажени въ діаметрѣ. Найти величину градуса экватора.

588. Извѣстно, что земля дѣлаетъ въ 24 часа одинъ оборотъ около оси; какое разстояніе пробѣгаетъ точка, взятая на экваторѣ земнаго шара, въ одну минуту?

589. Какой длины дуга сектора, если его двѣ прямыя стороны по 4,5 дюйм., а уголъ между ними 50^{0}?

590. Маховое колесо, котораго поперечникъ $5^3/_4$ фута, дѣлаетъ 42 оборота въ минуту. Какой длины путь пройдетъ въ это время точка, взятая на окружности колеса?

591. Нужно сдѣлать обѣденный столъ съ круглой доской на 8 человѣкъ. Какой длины надо взять радiусъ, если на каждаго сидящаго за столомъ положить 25 дюймовъ по длинѣ окружности?

592. Окружность бревна измѣрили при помощи шнурка и нашли, что съ одного конца бревна она въ $27^1/_2$ вершк., а съ другаго—$24^3/_4$ вершк. Какая разница въ толщинѣ бревна у его концовъ?

593. Сколько разъ поворачивается колесо на каждой верстѣ, если его поперечникъ равенъ $1^3/_4$ аршина?

594. Сколько градусовъ и минутъ въ дугѣ, которой длина равна ея радiусу?

595. Наружная окружность чугунной трубы 2 ф. 9 дюйм., а внутренняя 2 ф. 6 дюйм. Какая толщина стѣнокъ?

596. На колесѣ надо помѣстить 60 зубцовъ такъ, чтобы разстоянiе между ихъ гребнями равнялось $^3/_4$ дюйм. Какого радiуса должно быть это колесо?

597. Зубчатое колесо А (черт. 192), имѣющее 48 зубцовъ, соединено съ колесомъ В, на которомъ 20 зубцовъ, черезъ шестерню *b* съ восемью зубцами; колесо В цѣпляетъ шестерню *c* о 10 зубцахъ, скрѣпленную съ колесомъ С. Сколько оборотовъ дѣлаетъ колесо С при одномъ оборотѣ А?

192.

193.

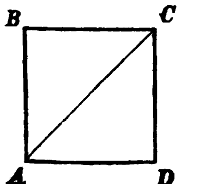
598. Два колеса соединены безконечнымъ ремнемъ (черт. 193). Большое колесо съ поперечникомъ 5 футовъ дѣлаетъ 90 оборотовъ въ минуту. Сколько оборотовъ въ минуту дѣлаетъ мѣньшее колесо, котораго дiаметръ равенъ 8 дюймамъ?

Какого поперечника должно быть малое колесо, чтобы оно дѣлало 600 оборотовъ въ минуту?

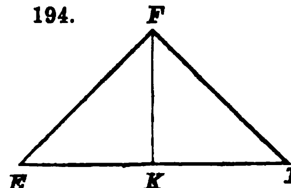


Равновеликiя фигуры.

599. *Часть плоскости, занятая какой нибудь фигурой, называется площадью этой фигуры.*



194.



600. Пусть будетъ квадратъ ABCD (ч. 194), въ которомъ проведена дiагональ AC. Построимъ △ EFK, равный треугольнику ACD, и продолжимъ

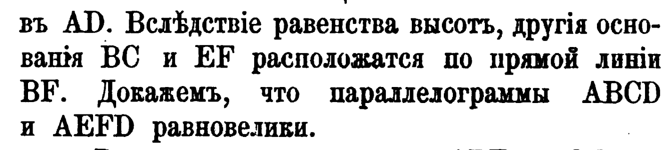
сторону EK; затѣмъ, отложивъ часть KL, равную EK, проведемъ прямую FL. Получится $\triangle$FKL, который равенъ треугольнику ABC (§ 169). Такимъ образомъ, $\triangle$EFL и данный квадратъ состоятъ изъ одинаковыхъ треугольниковъ и потому занимаютъ равныя площади.

Но эти фигуры нельзя назвать равными, потому что треугольникъ не можетъ совпадать съ квадратомъ.

601. *Двѣ фигуры, которыхъ площади равны между собой, называются равновеликими.*

602. *Теорема. Два параллелограмма съ одинаковыми основаніями и высотами равновелики.*

Пусть два параллелограмма ABCD и AEFD (черт. 195) съ одинаковыми основаніями и высотами совмѣщены своими основаніями въ AD. Вслѣдствіе равенства высотъ, другія основанія BC и EF расположатся по прямой линіи BF. Докажемъ, что параллелограммы ABCD и AEFD равновелики.



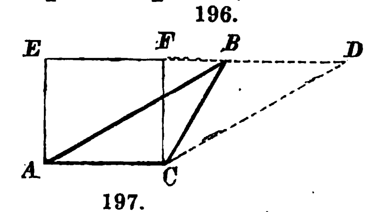
195.

Разсмотримъ треугольники ABE и DCF. Въ нихъ стороны AB и DC равны, какъ противоположныя стороны параллелограмма; по той же причинѣ и AE = DF; $\angle$ BAE = $\angle$ CDF, какъ углы, у которыхъ стороны одного параллельны сторонамъ другаго (§ 250). Значитъ, $\triangle$ABE = $\triangle$DCF.

Если изъ трапеціи ABFD вычесть треугольникъ DCF, то въ остаткѣ получится параллелограммъ ABCD; если изъ той же трапеціи ABFD вычесть треугольникъ ABE, то получится параллелограммъ AEFD. Но, вычитая изъ равныхъ поровну, мы получаемъ равные остатки (§ 12); слѣдовательно, первый остатокъ ABCD долженъ быть равенъ второму — AEFD, а это и нужно было доказать.

603. *Слѣдствіе* 1. *Всякій параллелограммъ равновеликъ прямоугольнику, имѣющему то же основаніе и ту же высоту.*

604. *Слѣдствіе* 2. *Всякій треугольникъ равновеликъ половинѣ параллелограмма, имѣющаго то же основаніе и ту же высоту* (ч. 196). $\triangle$ ABC = $\frac{1}{2}$ ABDC (§ 398), но вмѣсто ABDC можно подставить AEFC; значитъ, $\triangle$ ABC = $\frac{1}{2}$ AEFC.



196.

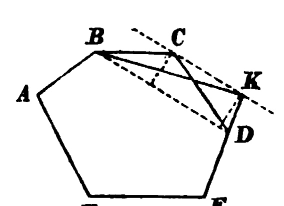
605. *Слѣдствіе* 3. Два треугольника съ одинаковыми основаніями и высотами равновелики (черт. 197). $\triangle$ADC = $\frac{1}{2}$ ABEC; подставивъ $\triangle$ABC вмѣсто $\frac{1}{2}$ ABEC, получимъ $\triangle$ADC = $\triangle$ABC.

197.

606. *Теорема. Всякій многоугольникъ можно превратить въ равновеликій ему треугольникъ.*

Пусть будетъ многоугольникъ ABCDEF (черт. 198).

198.



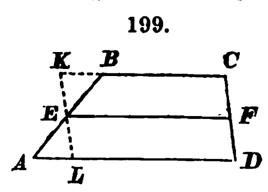
Отдѣлимъ отъ него діагональю BD треугольникъ BCD и продолжимъ одну изъ двухъ ближайшихъ къ этому треугольнику сторонъ ED; затѣмъ, проведемъ CK параллельно діагонали BD, до пересѣченія съ продолженной стороной, и, наконецъ, соединимъ точки B и K; тогда получимъ новый треугольникъ BKD, который равновеликъ треугольнику BCD, потому что у обоихъ треугольниковъ одно основаніе BD и равныя высо̀ты, такъ какъ вершины этихъ треугольниковъ C и K лежатъ на прямой, параллельной основанію BD. И такъ, $\triangle BCD = \triangle BKD$. Прибавивъ къ каждому изъ этихъ треугольниковъ по площади ABDEF, получимъ, что ABCDEF=ABKEF, т. е. что данный многоугольникъ равновеликъ другому, у котораго одной стороной меньше.

Если мы сдѣлаемъ въ новомъ многоугольникѣ ABKEF то же построеніе, какое было только что сдѣлано въ данномъ, то получится равновеликій ему многоугольникъ, у котораго будетъ двумя сторонами меньше, чѣмъ въ данномъ. Такимъ образомъ, повторяя одно и то же построеніе, можно уменьшить число сторонъ многоугольника до трехъ, т. е. получить треугольникъ, равновеликій данному многоугольнику.

607. *Теорема. Трапеція равновелика параллелограмму съ той же высотой и съ основаніемъ, равнымъ средней линіи.*

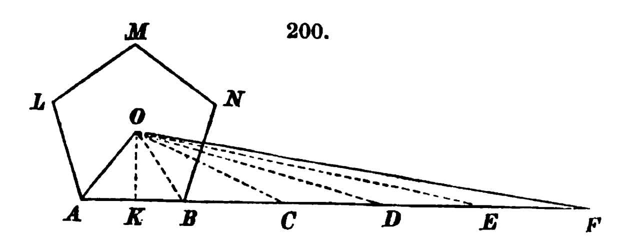
Пусть въ трапеціи ABCD (черт. 199) проведена средняя линія EF. Проведемъ прямую KL ∥ CD. Треугольники AEL и KEB равны

199.



между собой. (AE = EB, ∠ EAL = ∠ KBE и ∠ AEL = ∠ KEB). Замѣнивъ въ данной трапеціи $\triangle$ AEL равнымъ ему треугольникомъ KEB, получимъ параллелограммъ LKCD, котораго высота равна высотѣ трапеціи, а основаніе LD — средней линіи EF.

608. *Теорема. Правильный многоугольникъ равновеликъ треугольнику, основаніе котораго равно периметру, а высота — апоѳемѣ многоугольника.*

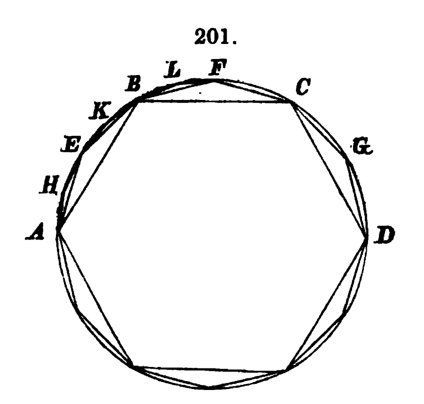


Данъ правильный многоугольникъ ALMNB (черт. 200); точка O центръ и OK — апоѳема. Продолжимъ сторону AB и отложимъ части BC,

CD, DE и EF, изъ которыхъ каждая равна сторонѣ многоугольника; проведя прямыя OA и OF, получимъ треугольникъ AOF, основаніе котораго AF равно периметру даннаго многоугольника, а высота OK — апоѳема. Докажемъ, что данный многоугольникъ ALMNB и треугольникъ AOF равновелики. Соединивъ вершину треугольника O съ точками B, C, D и E, получимъ треугольники BOC, COD, DOE и EOF, которые равновелики треугольнику AOB, потому что имѣютъ съ нимъ одинаковыя основанія (AB = BC = CD = DE = EF) и одну высоту OK. И такъ, полученные треугольники равновелики треугольникамъ, на которые можно раздѣлить весь данный правильный многоугольникъ (§ 474). Слѣдовательно, площади даннаго многоугольника ALMNB и треугольника AOF равны между собой.

609. Впишемъ въ кругъ шестиугольникъ ABCD.... (черт. 201) и двѣнадцатиугольникъ AEBF.... Площадь двѣнадцатиугольника больше площади шестиугольника на 6 треугольниковъ: △AEB + △BFC + △CGD и т. д. Если вписать въ тотъ же кругъ 24-угольникъ AHEKB...., то его площадь будетъ болѣе площади двѣнадцатиугольника на 12 треугольниковъ: △AHE + △EKB + △BLF и т. д. Удваивая такимъ образомъ число сторонъ многоугольника, мы будемъ получать все бо̀льшія и бо̀льшія площади, но эти площади никогда не будутъ больше площади круга, онѣ только безконечно приближаются къ площади круга: чѣмъ больше многоугольникъ будетъ имѣть сторонъ, тѣмъ ближе онъ будетъ подходить къ кругу. На этомъ основаніи мы можемъ принимать правильный многоугольникъ, у котораго очень много сторонъ, за кругъ, а апоѳему многоугольника — за радіусъ круга. И наоборотъ: *кругъ мы будемъ принимать за правильный многоугольникъ, у котораго безконечно много сторонъ,* радіусъ круга — за апоѳему, а окружность — за периметръ многоугольника.

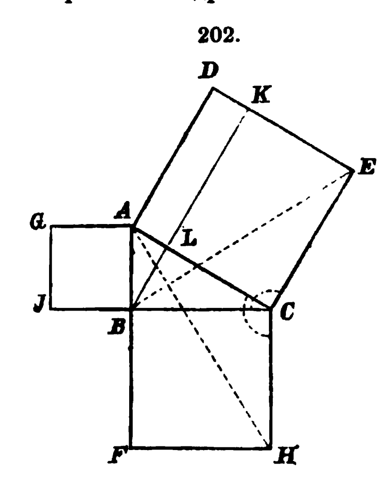
201.



610. *Слѣдствіе. Кругъ равновеликъ треугольнику, основаніе котораго равно окружности, а высота радіусу круга* (§ 608).

611. *Теорема* (Пиѳагора). *Квадратъ гипотенузы равенъ суммѣ квадратовъ катетовъ.*

Пусть на сторонахъ прямоугольнаго треугольника ABC (черт. 202) построены квадраты.



Надо доказать, что квадратъ гипотенузы ADEC равновеликъ суммѣ квадратовъ катетовъ BFHC + AGIB.

Изъ вершины прямаго угла B опустимъ перпендикуляръ BL на гипотенузу AC и продолжимъ его до пересѣченія съ противоположной стороной квадрата, построеннаго на гипотенузѣ; тогда квадратъ этотъ раздѣлится на два прямоугольника CLKE и ALKD. Докажемъ, что прямоугольникъ CLKE равновеликъ квадрату BFHC. Для этого проведемъ прямыя BE и AH и разсмотримъ полученные треугольники CBE и HAC. Сторона BC одного треугольника равна сторонѣ HC другаго, какъ стороны квадрата BFHC; сторона CE перваго треугольника равна сторонѣ AC втораго, какъ стороны квадрата ADEC; уголъ BCE перваго треугольника равенъ углу HCA втораго, потому что каждый изъ этихъ угловъ состоитъ изъ прямаго, сложеннаго съ однимъ и тѣмъ же острымъ угломъ BCA. Стало быть, $\triangle$ CBE = $\triangle$ HAC (§ 169). Но $\triangle$ CBE равновеликъ половинѣ прямоугольника CLKE, потому что имѣетъ съ нимъ одно основаніе CE и одну высоту CL (§ 604), а $\triangle$ HAC равновеликъ половинѣ квадрата BFHC — тоже имѣетъ одно основаніе HC и одну высоту CB.

Подставивъ въ предъидущее равенство ($\triangle$ CBE = $\triangle$ HAC) величины, равновеликія треугольникамъ, получимъ $\frac{1}{2}$ CLKE = $\frac{1}{2}$ BFHC, а потому и CLKE = BFHC. И такъ, мы доказали, что прямоугольникъ CLKE равновеликъ квадрату BFHC.

Точно такъ же можно доказать, что прямоугольникъ ALKD равновеликъ квадрату AGIB. Слѣдовательно, сумма обоихъ прямоугольниковъ или квадратъ ADEC равновеликъ суммѣ квадратовъ BFHC и AGIB.

612. *Слѣдствіе. Квадратъ каждаго катета равновеликъ квадрату гипотенузы безъ квадрата другаго катета.*

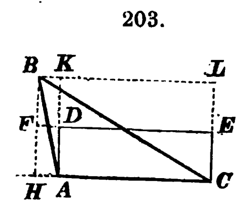
Упражненія. 613. Построить прямоугольникъ, равновеликій данному параллелограмму.

614. Построить ромбъ, равновеликій данному прямоугольнику.

615. Данный прямоугольникъ раздѣлить на два или нѣсколько равновеликихъ прямоугольниковъ.

616. Построить прямоугольникъ, равновеликій данному треугольнику ABC (черт. 203).

203.

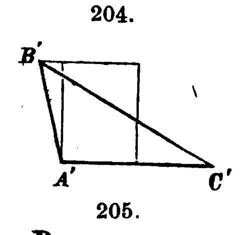


Построеніе. Высоту даннаго треугольника BH раздѣлимъ пополамъ, изъ ея середины проведемъ прямую FE, параллельно основанію AC, и изъ точекъ A и C возставимъ къ основанію перпендикуляры AD и CE. Полученный прямоугольникъ ADEC равновеликъ данному треугольнику ABC.

Доказательство. Данный треугольникъ ABC равновеликъ половинѣ прямоугольника AKLC (§ 604); прямоугольникъ ADEC тоже составляетъ половину прямоугольника AKLC; стало быть, $\triangle ABC = ADEC$.

Построить другимъ способомъ прямоугольникъ, равновеликій данному треугольнику A'B'C' (черт. 204).

204.



205.

D B A C

617. Построить прямоугольный треугольникъ, равновеликій данному треугольнику ABC (черт. 205). BD || AC и AD ⊥ AC.

618. Построить равнобедренный треугольникъ, равновеликій данному прямоугольнику.

619. Построить треугольникъ, равновеликій данному, такъ, чтобы онъ имѣлъ уголъ при основаніи въ 60^{0}.

620. Какъ располагаются вершины всѣхъ равновеликихъ треугольниковъ съ однимъ и тѣмъ же основаніемъ?

621. Превратить данный треугольникъ въ равновеликій ему другой, съ тѣмъ же основаніемъ и данной стороной.

622. Построить треугольникъ, равновеликій данному пятиугольнику (§ 606).

623. Построить параллелограммъ, равновеликій данной трапеціи (§ 607).

624. Построить прямоугольникъ, равновеликій данной трапеціи, данному многоугольнику.

625. Построить треугольникъ, равновеликій данному правильному шестиугольнику, восьмиугольнику.

626. Построить прямоугольникъ, равновеликій данному правильному многоугольнику.

627. Построить треугольникъ, котораго площадь въ три раза болѣе площади даннаго треугольника.

628. Построить равнобедренный треугольникъ, котораго площадь въ 4 раза больше площади даннаго треугольника.

629. Данный треугольникъ раздѣлить на двѣ, три равновеликія части.

630. Во сколько разъ площадь квадрата, описаннаго около круга, больше площади квадрата вписаннаго (черт. 206)?

206.

631. Показать, что площадь ромба меньше площади квадрата, когда эти фигуры имѣютъ одинъ и тотъ же периметръ.

632. Построить квадратъ, равный суммѣ двухъ данныхъ квадратовъ (§ 611).

633. Построить квадратъ, равный суммѣ нѣсколькихъ данныхъ квадратовъ.

634. Построить квадратъ, который былъ бы въ нѣсколько разъ больше даннаго квадрата.

635. Построить квадратъ, равный разности двухъ данныхъ квадратовъ.

636. Построить квадратъ, равный половинѣ даннаго квадрата.

637. Показать, что двѣ прямыя, проведенныя изъ середины одного бока трапеціи къ концамъ другаго, образуютъ съ нимъ треугольникъ, равновеликій половинѣ трапеціи.

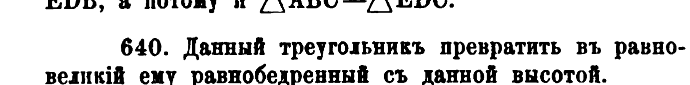
638. Отъ точки O (черт. 207), произвольно взятой внутри даннаго параллелограмма ABCD, проведены прямыя къ его вершинамъ.

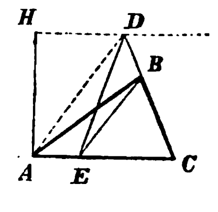
207.

Доказать, что сумма противоположныхъ треугольниковъ (напримѣръ, $\triangle AOD + \triangle BOC$) равновелика половинѣ даннаго параллелограмма.

639. Данный треугольникъ ABC (черт. 208) превратить въ равновеликій ему треугольникъ съ данной высотой AH.

Продолжить сторону CB; провести HD ∥ AC, BE ∥ AD. Треугольникъ EAB равновеликъ треугольнику EDB, а потому и $\triangle ABC = \triangle EDC$.

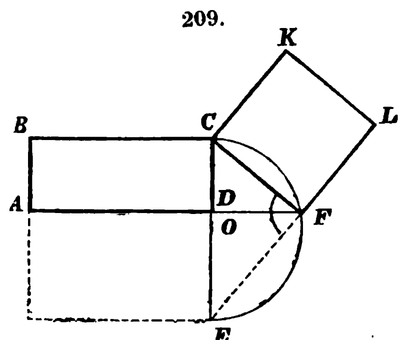




208.

640. Данный треугольникъ превратить въ равновеликій ему равнобедренный съ данной высотой.

641. Данный равнобедренный треугольникъ превратить въ равновеликій ему равнобедренный же съ даннымъ основаніемъ.



209.

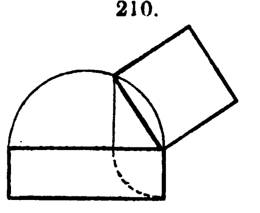
642. Построить квадратъ, равновеликій данному прямоугольнику (другими словами: найти *квадратуру* прямоугольника).

Построеніе. Продолживъ мѣньшую сторону CD даннаго прямоугольника ABCD (черт. 209), откладываемъ CE, равную CB; принимаемъ CE за діаметръ и описываемъ половину окружности; про-

должив, затѣмъ, AD до пересѣченія съ окружностью (F), проводимъ прямую CF, которая и есть сторона искомаго квадрата.

Доказательство. Проведя прямую FE, получимъ прямоугольный треугольникъ CFE (§ 470). Было доказано (§ 611), что прямоугольникъ ABCD долженъ быть равновеликъ квадрату CKLF.

Показать, что построеніе, указанное на чертежѣ 210, достигаетъ той же цѣли, какой и предъидущее.

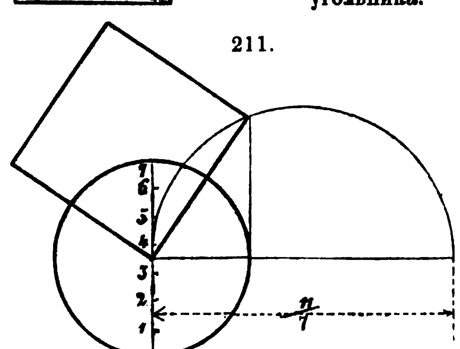

210.

643. Превратить данный треугольникъ въ равновеликій ему квадратъ (иначе: найти квадратуру треугольника) §§ 616, 642.

644. Найти квадратуру параллелограмма.

645. Найти квадратуру трапеціи.

646. Найти квадратуру правильнаго многоугольника.



211.

647. Найти квадратуру данной прямолинейной фигуры.

648. Построить квадратъ въ три, въ пять разъ меньше даннаго.

649. Найти квадратуру круга (приблизительно; черт. 211).

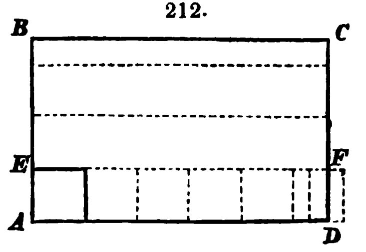
650. Построить прямолинейную фигуру, равновеликую (приблизительно) площади кольца, образовавшагося между двумя окружностями, описанными изъ одного центра.

XII.

Измѣреніе площадей.

651. *Измѣрить площадь значитъ узнать, сколько разъ она содержитъ въ себѣ другую площадь, принятую за единицу.*

За единицу площади принимается *площадь квадрата,* сторона котораго равна какой нибудь линейной единицѣ. Напр., за единицу площади можно принять площадь квадрата, котораго сторона длиной въ 1 верш., 1 футъ, 1 сажень, и т. д. Эти единицы называются квадратными вершками, квадратными футами, квадратными саженями.



212.

652. *Теорема. Площадь прямоугольника равна произведенію основанія на высоту.*

Данъ прямоугольникъ ABCD (ч. 212), котораго основаніе AD равно $5\frac{2}{3}$ вершк., а высота AB равна $3\frac{1}{2}$ вершк.

Надо доказать, что площадь этого прямоугольника равна $5^2/_3 \times 3^1/_2 = {}^{119}/_6 = 19\,^5/_6$ квадратныхъ вершковъ. Если основаніе прямоугольника AD равно $5^2/_3$ вершка, то это значитъ, что вдоль основанія можно расположить въ одинъ рядъ $5^2/_3$ квадратныхъ вершковъ, которые займутъ прямоугольникъ AEFD въ 1 вершокъ высоты. Но высота AB равна $3^1/_2$ вершкамъ; стало быть, въ прямоугольникѣ ABCD можетъ умѣститься три ряда, равныхъ AEFD, и еще рядъ, равный половинѣ AEFD. Слѣдовательно, чтобы получить число квадратныхъ вершковъ во всей данной площади ABCD, надо число квадратовъ въ AEFD умножить на $3^1/_2$, т. е. $5^2/_3$ кв. в. $\times\, 3^1/_2 = 19\,^5/_6$ кв. в., что и требовалось доказать.

653. Квадратъ можно разсматривать какъ прямоугольникъ съ одинаковыми основаніемъ и высотой, а потому *площадь квадрата получимъ, если число единицъ его стороны возьмемъ множителемъ два раза* или, какъ говорится, возьмемъ въ квадратъ. Напримѣръ, если сторона квадрата равна 8 футамъ, то площадь его равна $8 \times 8 = 64$ квадр. фут.

Обыкновенно пишутъ вычисленіе такъ: $8^2 = 64$ и читаютъ: восемь въ квадратѣ равно шестидесяти четыремъ.

Чтобы по данной площади квадрата найти длину его стороны, надо отыскать число, которое, взятое въ квадратъ, равнялось бы числу квадратныхъ единицъ въ площади; напр., если площадь квадрата равна 625 кв. саж., то его сторона будетъ 25 саж., потому что $25 \times 25 = 625$. Отысканіе числа, которое, взятое въ квадратъ, равно данному, называется *извлеченіемъ квадратнаго корня* изъ даннаго числа. Это дѣйствіе обозначается знакомъ $\sqrt{\ }$; напримѣръ $\sqrt{625} = 25$. (Объ этомъ подробнѣе въ приложеніи. Стр. 143).

654. *Площадь параллелограмма равна произведенію основанія на высоту*, потому что параллелограммъ равновеликъ прямоугольнику съ тѣмъ же основаніемъ и той же высотой (§ 603).

655. *Площадь треугольника равна половинѣ произведенія основанія на высоту,* потому что треугольникъ равновеликъ половинѣ параллелограмма съ тѣмъ же основаніемъ и той же высотой (§ 604). Напр., если (черт. 213) основаніе треугольника AB = 6 дюйм., а высота CD = 5 дюйм., то площадь его равна $\frac{6\,.\,5}{2} = 15$ квадр. дюйм.

213.

C

A B D

656. *Площадь трапеціи равна произведенію средней линіи на высоту* (§ 607). Напр.,

если основанія трапеціи 7 и 5 вершковъ, а высота 4 вершка, то средняя линія будетъ $\frac{7+5}{2}=6$ вершковъ (§ 394), а площадь $6\times4=24$ квадр. вершк.

657. *Площадь всякаго многоугольника* можно измѣрить двумя способами: 1) *раздѣлить* данный многоугольникъ діагоналями на *треугольники,* измѣрить площадь каждаго изъ нихъ и сложить; 2) *превратить данный многоугольникъ въ равновеликій ему треугольникъ* (§ 606) и измѣрить площадь этого треугольника.

658. *Площадь правильнаго многоугольника равна половинѣ произведенія периметра на апоѳему* (§§ 608 и 655).

659. *Площадь круга равна половинѣ произведенія окружности на радіусъ* (§ 610).

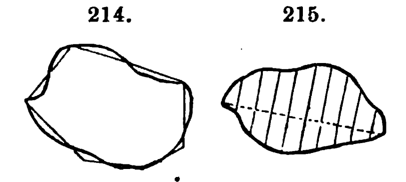
Обозначая число единицъ въ радіусѣ черезъ R, мы видѣли (§ 568), что окружность выразится формулой $2\pi R$. Площадь круга получимъ, если возьмемъ половину произведенія окружности на радіусъ, а потому площадь круга выразится формулой $\frac{2\pi R \cdot R}{2}$ или πR^2.

Напр., если радіусъ круга R=5 дюйм., то площадь круга равна $\pi R^2=3{,}14 \cdot 25$ или равна 78,5 квадр. дюйм.

По данной площади круга можно вычислить длину радіуса. Напр., пусть площадь даннаго круга будетъ 425 квадр. саженъ.

Значитъ, дано, что $\pi R^2=425$; когда мы раздѣлимъ 425 на 3,14, то получимъ $R^2=135{,}35$, стало быть $R=\sqrt{135{,}35}=11{,}6$, т. е. радіусъ даннаго круга равенъ 11,6 саж.

660. Для опредѣленія площади какой нибудь криволинейной фигуры (черт. 214) дѣлятъ на части кривыя линіи, ограничивающія фигуру, и, принявъ эти части за прямыя, измѣряютъ площадь извѣстными способами. Часто раздѣляютъ криволинейную площадь на трапеціи одинаковой высоты (черт. 215) и находятъ затѣмъ площадь всѣхъ трапецій.



Упражненія. 661. Вычислить площадь прямоугольника, котораго стороны $8\frac{3}{4}$ и $5\frac{2}{3}$ дюйма.

662. Площадь прямоугольника равна 23 квадр. вершк., а основаніе 5 вершк. Найти высоту.

663. Вычислить площадь пола, поверхность стѣнъ комнаты.

664. Десятина равна 2400 квадр. саж. Какія стороны можетъ имѣть прямоугольная площадь, равная одной десятинѣ?

665. Найти площадь квадрата, котораго сторона равна $2\frac{1}{2}$ дюйм.

666. Какъ получается слѣдующая таблица квадратныхъ мѣръ:

1 кв. миля = 49 кв. верст.
1 кв. верста = 250000 кв. саж.
1 кв. саж. = 9 кв. арш.
1 кв. арш. = 256 кв. вершк.
1 кв. саж. = 49 кв. фут.
1 кв. футъ = 144 кв. дюйм.
1 кв. дюймъ = 100 кв. лин.

667. Сколько десятинъ въ одной квадратной верстѣ?

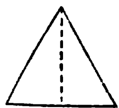
668. Въ одномъ квадратномъ аршинѣ сколько квадр. футовъ?

669. Сколько саж. въ сторонѣ квадрата, котораго площадь равна одной десятинѣ?

670. Катеты прямоугольнаго треугольника 8 и 5 дюйм. Какой длины гипотенуза?

Квадратъ гипотенузы равенъ суммѣ квадратовъ катетовъ (§ 611). Квадраты катетовъ будутъ 64 и 25 кв. дюйм.; значитъ, квадратъ гипотенузы будетъ $64 + 25 = 89$ кв. дюйм. Длина гипотенузы, какъ сторона квадрата въ 89 кв. дюйм., будетъ равна $\sqrt{89} = 9{,}43$ дюйм.

216.



671. Вычислить длину сторонъ равнобедреннаго треугольника, котораго основаніе 6, а высота 5 вершк. (черт. 216).

672. Вычислить катетъ прямоугольнаго треугольника, у котораго другой катетъ 9, а гипотенуза = 15 дюйм.

673. Вычислить высоту равносторонняго треугольника, котораго сторона = 10 вершк.

674. Вычислить апоѳему правильнаго шестиугольника, вписаннаго въ кругъ, котораго радіусъ равенъ 7 вершкамъ.

675. Вычислить площадь параллелограмма, основаніе котораго 1 саж. $\frac{1}{2}$ фута, а высота $5\frac{1}{3}$ фута.

676. Найти основаніе параллелограмма, котораго площадь равна $13\frac{3}{4}$ квадр. дюйма, а высота $3\frac{2}{3}$ дюйма.

677. Вычислить площадь треугольника, основаніе котораго = 7, а высота = 5 вершк.

678. Найти высоту треугольника, площадь котораго 100 кв. саж., а основаніе 20 саж.

679. Найти основаніе треугольника, если его высота $2\frac{1}{2}$ дюйма, а площадь $3\frac{3}{4}$ квадр. дюйма.

680. Опредѣлить площадь трапеціи, которой высота = 5 вершк., одно основаніе = 7, а другое = 4 вершк.

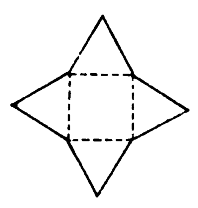
681. Найти величину средней линіи трапеціи, если ея площадь равна 20 квадр. дюйм., а высота 3 дюйм.

682. Показать, что *площадь всякаго многоугольника, описаннаго около круга, равна половинѣ произведенія периметра на радіусъ круга.*

683. Найти площадь равносторонняго треугольника, котораго сторона равна 12 арш. (§ 673).

684. Найти площадь правильнаго шестиугольника, котораго сторона равна 6 дюйм.

217.



685. Найти площадь квадрата, вписаннаго въ кругъ, котораго радіусъ равенъ 5 вершк. Найти площадь описаннаго около этого круга квадрата.

686. Вычислить площадь (черт. 217), которую занимаетъ квадратъ съ правильными треугольниками, построенными на его сторонахъ. Сторона этой фигуры равна 8 дюймамъ.

218.

687. Вычислить площадь (черт. 218), которую занимаетъ правильный шестиугольникъ съ построенными на его сторонахъ правильными треугольниками. Сторона треугольника = 14 дюйм.

688. Вычислить стороны квадрата и правильнаго треугольника, вписанныхъ въ кругъ (радіусъ = 1 арш.).

689. Вычислить площадь правильнаго треугольника, вписаннаго въ кругъ (радіусъ = 7 вершк.).

690. Вычислить площадь круга, котораго радіусъ равенъ 14 дюйм., 10 вершк.

691. Показать, что *площадь круга выразится формулой* $\frac{\pi D^2}{4}$, *если* D *означаетъ длину діаметра.*

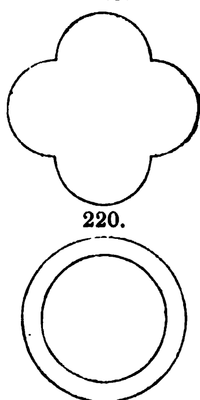
692. Найти площадь круга, котораго окружность равна 15,7 вершка.

693. Какую площадь занимаетъ круглый прудъ, если его окружность 51 саж. 1 арш.?

694. Вычислить площади правильныхъ—треугольника, четыреугольника, шестиугольника и площадь круга, которыхъ периметры одинаковы и равны каждый 132 вершк.

695. Вычислить площадь, занимаемую квадратомъ, на сторонахъ котораго построены половины круговъ (черт. 219). Сторона квадрата 5 дюйм.

219.



220.

696. Вычислить площадь, заключенную между двумя окружностями радіусовъ въ $1\frac{1}{2}$ и 2 дюйма (черт. 220).

697. Вычислить площадь сектора, котораго дуга 75°, а радіусъ дуги 3 дюйма.

698. Въ кругъ радіуса 6 дюйм. вписанъ квадратъ, а въ квадратъ кругъ. Вычислить площади обоихъ круговъ. На сколько они отличаются отъ площади квадрата и во сколько разъ площадь одного круга больше площади другаго?

699. Въ кругъ вписанъ правильный шестиугольникъ, а въ этотъ послѣдній — кругъ. Опредѣлить площади этихъ трехъ фигуръ, если радіусъ перваго круга 5 вершк.

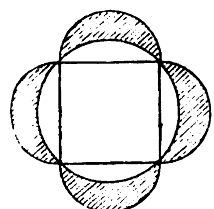
700. Сколько десятинъ въ полѣ, имѣющемъ видъ параллелограмма съ основаніемъ въ 375 саж. и высотою 164 саж.?

701. Надо замѣнить площадь, имѣющую видъ трапеціи съ основаніями 97 и 75 саж. и высотою 55 саж., треугольной площадью съ основаніемъ въ 165 саж. Какую высоту нужно придать треугольнику?

702. Вычислить площадь равнобедреннаго треугольника, котораго основаніе равно 10 дюйм., а боковыя стороны по 8 дюйм.

703. Въ кругъ радіуса 10 дюйм. (черт. 221) вписанъ квадратъ, на сторонахъ котораго построены половины круговъ. Вычислить площадь, означенную на чертежѣ штрихами, а также площадь квадрата; сравнить эти площади.

221.



704. Опредѣлить площадь прямоугольнаго треугольника по его катетамъ 8 и 9 вершк.

705. Опредѣлить площадь прямоугольнаго треугольника по гипотенузѣ 15 и катету 12 вершк.

706. Опредѣлить площадь квадрата по его діагонали въ 30 фут.

707. Сколько потребуется ковра, шириною въ $2\frac{1}{2}$ арш., чтобы покрыть полъ въ комнатѣ, длина которой 13, а ширина $7\frac{1}{2}$ арш.?

708. Въ дровяной сарай входитъ 8 полѣнницъ дровъ; каждая полѣнница $6\frac{1}{2}$ арш. длины и 3 арш. 12 вершк. вышины. Сколько саженъ дровъ можетъ быть положено въ этотъ сарай?

709. Показать, какъ будемъ вычислять поверхность крыши, двѣ стороны которой трапеціи, сведенныя короткими основаніями, а другія двѣ — треугольныя.

710. Сколько нужно кусковъ обоевъ для оклейки стѣнъ комнаты, которая имѣетъ $3\frac{1}{2}$ саж. длины, 2 саж. 1 арш. ширины и $4\frac{1}{2}$ арш. вышины? Въ комнатѣ два окна въ $1\frac{3}{4}$ арш. шир. и $2\frac{1}{2}$ арш. высоты и двѣ двери, вышиной въ 3 арш. и шириной въ $2\frac{1}{4}$ арш. Длина куска обоевъ 12 арш., а ширина 12 вершк.

711. Радіусъ одного круга 1 арш., а другаго 3 арш. Во сколько разъ площадь втораго круга больше площади перваго?

712. Если стороны квадрата, площадь котораго въ 64 квадр. вершка, увеличить на 1 вершк., то на сколько увеличится площадь квадрата?

713. Вычислить площадь поперечнаго разрѣза желѣзнаго прута, діаметръ котораго $= \frac{3}{8}$ дюйма, 5 линій, $2\frac{1}{2}$ линіи.

714. Вычислить поперечное сѣченіе трубки, которой діаметръ $7\frac{1}{2}$ линій, а толщина стѣнокъ $1\frac{1}{4}$ линіи.

715. Сколько нужно плитъ въ $\frac{3}{4}$ арш. длины и 9 вершк. шир. для тротуара въ 72 саж. длины и $2\frac{1}{4}$ арш. ширины?

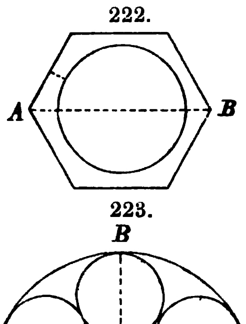
716. Сторона одного правильнаго треугольника въ 4 дюйма, а другаго въ 1 дюймъ. Во сколько разъ площадь перваго больше площади втораго?

717. Сторона одного квадрата 6 фут., а другаго 2 фут.; во сколько разъ площадь перваго больше площади втораго?

718. Сторона одного правильнаго шестиугольника 10 дюйм., а другаго 5 дюйм. Во сколько разъ площадь перваго больше площади втораго?

719. Увеличить правильный треугольникъ, четыреугольникъ, шестиугольникъ и кругъ въ 4, въ 9, въ 25 разъ.

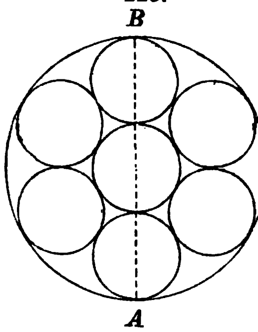
222.



720. Вычислить площадь разрѣза стѣнокъ шестигранной трубки съ круглымъ отверстіемъ (черт. 222), если ширина разрѣза AB = 12 линій, а толщина стѣнокъ въ самомъ тонкомъ мѣстѣ 1 линія.

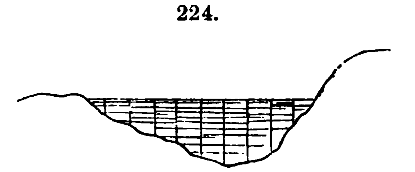
721. На протяженіи $1\frac{1}{2}$ версты черезъ поля провели дорогу въ 5 саж. ширины. Сколько земли пошло подъ дорогу?

223.



722. За окраску 4 дверей съ обѣихъ сторонъ заплатили 9 руб. Каждая дверь была по сажени вышины и 2 арш. ширины. Сколько берутъ за окраску одного квадратнаго аршина?

224.



723. Вычислить площадь семи равныхъ круговъ, заключенныхъ въ кругъ (черт. 223), діаметръ котораго 10 линій.

724. Вычислить площадь поперечнаго разрѣза рѣки (черт. 224. Сумма площадей треугольниковъ и трапецій).

XIII.

Пропорціональныя линіи.

725. *Число, которое показываетъ во сколько разъ одна величина больше другой, или одна величина какая часть другой, называется отношеніемъ первой величины ко второй.*

Примѣры. Если одна прямая AB въ 5 разъ болѣе прямой CD, то отношеніе AB къ CD равно 5. Обозначаютъ это такъ:

$$AB : CD = 5.$$

Если одна прямая 3 фута, а другая въ 8 фут., то отношеніе первой ко второй равно $^3/_8$.

Если площадь треугольника ABC составляетъ $^1/_2$ площади параллелограмма ABCD, то отношеніе ABC къ ABCD равно $^1/_2$, или

$$ABC : ABCD = {}^1/_2.$$

Отношеніе окружности къ діаметру выражается числомъ $\pi=3,1415926......$, такъ что, обозначая длину окружности буквой C, а діаметра—D, можемъ написать:

$$C:D=\pi \text{ или } \frac{C}{D}=\pi.$$

726. *Если величины составляютъ равныя отношенія, то ихъ называютъ пропорціональными величинами.*

Напримѣръ, центральные углы пропорціональны соотвѣтствующимъ дугамъ, потому что какое отношеніе между дугами, такое же отношеніе между имъ соотвѣтствующими центральными углами (§ 144).

Точно такъ же числа 1, 2, 3 пропорціональны числамъ 5, 10, 15, потому что

$$1:5=2:10=3:15.$$

727. *Теорема. Двѣ параллельныя, пересѣкающія стороны угла, отдѣляютъ отъ нихъ пропорціональныя части.*

Пусть прямыя BC и DE параллельны; прямая BC отдѣляетъ отъ сторонъ угла BAC (черт. 225) части AB и AC, а прямая DE отдѣляетъ части AD и AE.

225.

Дано: BC || DE.
Тр. д. AB : AD = AC : AE.

Требуется доказать, что части AB и AD пропорціональны AC и AE, т. е. что

$$AB:AD=AC:AE.$$

Положимъ, что AB содержитъ въ себѣ 9 такихъ частей, какихъ въ AD заключается 5; тогда отношеніе AB къ AD будетъ равно $^9/_5$, или $AB:AD=\,^9/_5$. Если черезъ всѣ точки, раздѣляющія AB на части, провести параллельныя къ BC, то AC раздѣлится на 9 равныхъ частей (§ 248) и AE будетъ содержать 5 такихъ частей. Стало быть, отношеніе AC къ AE равно $^9/_5$, или $AC:AE=\,^9/_5$. И такъ, мы имѣемъ, что

$$AB:AD=\,^9/_5$$
$$\text{и } AC:AE=\,^9/_5\,;$$

значитъ, $AB:AD=AC:AE$, а это и нужно было доказать.

728. *Слѣдствіе. Параллельныя прямыя разсѣкаютъ стороны угла на пропорціональные отрѣзки.* Въ самомъ дѣлѣ: если въ отрѣзкѣ DB — 4 части (черт. 225), а въ AD — 5, то и въ EC будетъ 4 части, а въ AE — 5; слѣдовательно,

$$DB:AD=EC:AE.$$

Такъ же точно не трудно доказать, что

$$AB:DB=AC:EC.$$

729. *Теорема (обратная). Если двѣ прямыя отдѣляютъ отъ сторонъ угла пропорціональныя части, то эти прямыя параллельны.*

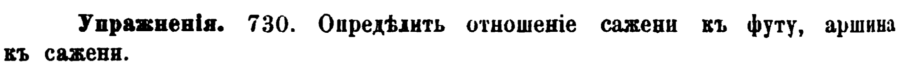
Пусть AB : AD = AC : AE (черт. 226).

Докажемъ, что BC параллельна DE. Предположимъ, что BC не параллельна DE; тогда черезъ точку B можно провести прямую BF параллельно DE; а если BF параллельна DE, то по доказанному (§ 727) AB : AD = AF : AE.

226.

Дано: AB : AD = AC : AE.
Тр. док. BC ∥ DE.

Сравнивъ эту пропорцію съ данной, найдемъ, что въ нихъ три члена одинаковы, AB, AD и AE, значитъ, и четвертые должны быть равны AC = AF; но это невозможно, потому что AF часть AC. И такъ, предположеніе, что BC не параллельна DE, привело къ невозможному выводу (AC = AF); слѣдовательно, оно невѣрно, а потому BC ∥ DE.



Упражненія. 730. Опредѣлить отношеніе сажени къ футу, аршина къ сажени.

731. Опредѣлить отношеніе аршина къ футу.

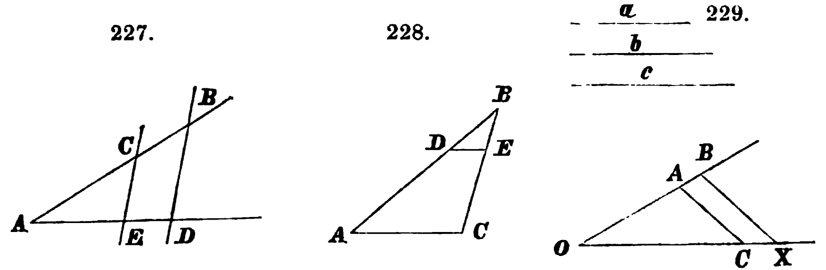
732. Опредѣлить отношеніе квадратной сажени къ квадратному аршину,— квадратнаго фута къ квадратному аршину.

733. Опредѣлить отношеніе площади треугольника съ основаніемъ 5 и высотою 3 дюйма къ площади прямоугольника съ такими же основаніемъ и высотой.

734. Опредѣлить отношеніе площади круга къ площади вписаннаго въ него квадрата.

735. Опредѣлить отношеніе площадей двухъ круговъ, радіусы которыхъ 15 и 5 дюймовъ.

736. Вычислить длину прямой AB (черт. 227), если AC = 8 лин., AD = 9 лин., AE = 6 лин. и если BD ∥ CE.



737. Въ треугольникѣ ABC (черт. 228) сторона BA = 15 дюймамъ, BC = 10 дюйм. Черезъ точку D въ 5 дюймахъ отъ вершины B проведена прямая DE параллельно AC. Опредѣлить длину BE.

738. Даны три прямыя a, b и c (черт. 229); построить четвертую пропорціональную даннымъ.

На одной сторонѣ произвольнаго угла отложимъ части OA и OB, равныя a и b, а на другой сторонѣ часть OC, равную c; проведя прямую AC и параллельную ей BX черезъ точку B, получимъ отрѣзокъ OX, который и будетъ искомая прямая.

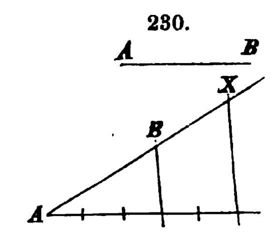
Такъ какъ AC ‖ BX, то по § 727 OA : OB = OC : OX, или

$$a : b = c : OX,$$

слѣдовательно, OX есть четвертая пропорціональная даннымъ тремъ прямымъ.

739. Раздѣлить данную прямую на двѣ части, пропорціональныя двумъ другимъ даннымъ прямымъ (§ 728).

230.



740. Раздѣлить данную прямую на три части, пропорціональныя числамъ 2 : 3 : 4.

741. Данную прямую AB увеличить въ отношеніи 5 : 3 (черт. 230).

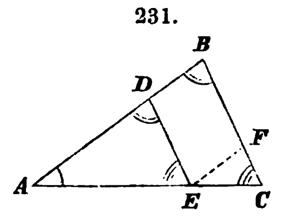
742. Нѣсколько данныхъ прямыхъ увеличить въ одномъ и томъ же отношеніи.

XIV.

Подобіе фигуръ.

743. Въ треугольникѣ ABC (черт. 231) проведемъ прямую DE параллельно сторонѣ BC; получится новый треугольникъ ADE. Разсмотримъ его углы и стороны.

231.



Уголъ A въ треугольникахъ ABC и ADE — общій, углы D и B равны между собой, какъ соотвѣтственные въ параллельныхъ DE и BC при пересѣкающей BA, углы E и C тоже равны между собой, какъ соотвѣтственные въ тѣхъ же параллельныхъ при пересѣкающей AC. Стало быть, всѣ три угла треугольника ABC порознь равны угламъ треугольника ADE.

Параллельныя BC и DE, пересѣкающія стороны угла BAC, отдѣляютъ отъ нихъ пропорціональныя части (§ 727), а потому имѣемъ

$$AB : AD = AC : AE — I.$$

Проведя EF параллельно AB, будемъ имѣть (§ 728)

$$AC : AE = BC : BF;$$

а такъ какъ BF = DE (§ 246), то

$$AC : AE = BC : DE — II.$$

Сравнивая эту (II) пропорцію съ первой (I), найдемъ

$$AB : AD = AC : AE = BC : DE,$$

т. е. что всѣ стороны треугольника ABC пропорціональны сторонамъ треугольника ADE.

И такъ, въ треугольникахъ ABC и ADE всѣ углы одного порознь равны угламъ другаго и сходственныя *) стороны пропорціональны.

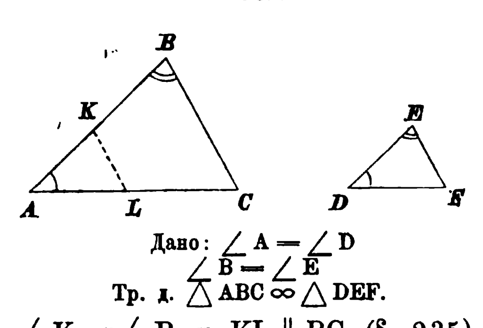
744. *Два треугольника, у которыхъ всѣ углы одного порознь равны угламъ другаго и сходственныя стороны пропорціональны, называются подобными.* Подобіе обозначается знакомъ „∞“, напр. $\triangle ABC \infty \triangle ADE$.

745. Доказанное въ § 743 можно выразить такъ: *прямая, проведенная въ треугольникѣ параллельно одной изъ сторонъ, отдѣляетъ новый треугольникъ, подобный первому.*

746. *Теорема. Если два угла одного треугольника порознь равны двумъ угламъ другаго, то треугольники подобны.*

Пусть въ треугольникахъ ABC и DEF (черт. 232) $\angle A = \angle D$ и $\angle B = \angle E$.

232.



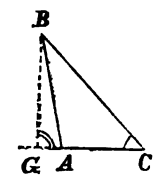
Докажемъ, что эти треугольники подобны, то есть $\triangle ABC \infty \triangle DEF$.

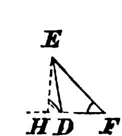
На сторонѣ AB отъ точки A отложимъ часть AK, равную DE и построимъ уголъ K, равный углу E. Получимъ треугольникъ AKL, равный треугольнику DEF (§ 170); но такъ какъ $\angle E = \angle B$, то и $\angle K = \angle B$ и $KL \parallel BC$ (§ 235), а потому $\triangle ABC \infty \triangle AKL$ (§ 745). Подставивъ вмѣсто $\triangle AKL$ ему равный $\triangle DEF$, получимъ, что $\triangle ABC \infty \triangle DEF$.

747. *Слѣдствіе. Въ подобныхъ треугольникахъ высоты пропорціональны сходственнымъ сторонамъ.*

Въ подобныхъ треугольникахъ ABC и DEF (черт. 233) $\angle C = \angle F$; высоты треугольниковъ BG и EH образуютъ тоже равные углы G и H (прямые углы); значитъ, треугольники BGC и EHF подобны (§ 746), а потому $BG:EH = BC:EF = BA:ED = AC:DF$.

233.





748. *Теорема. Если двѣ стороны одного треугольника пропорціональны двумъ сторонамъ другаго и углы между этими сторонами равны, то треугольники подобны.*

*) Сходственныя стороны тѣ, которыя лежатъ противъ равныхъ угловъ.

Пусть въ треугольникахъ ABC и DEF (черт. 234) AB : DE = AC : DF и $\angle$ A = $\angle$ D.

234.

Дано: AB : DE = AC : DF
$\angle$ A = $\angle$ D.
Треб. док. $\triangle$ ABC ∞ $\triangle$ DEF.

Докажемъ, что
$\triangle$ ABC ∞ $\triangle$ DEF.

На сторонахъ AB и AC отложимъ части AK и AL, равныя DE и DF, и проведемъ прямую KL. Тогда треугольникъ AKL будетъ равенъ треугольнику DEF (§ 169).

Подставивъ въ данную пропорцію вмѣсто DE и DF равныя имъ AK и AL, получимъ AB : AK = AC : AL, а въ этомъ случаѣ, какъ извѣстно (§ 729), KL $\parallel$ BC и потому $\triangle$ ABC ∞ $\triangle$ AKL. Подставивъ сюда вмѣсто $\triangle$ AKL ему равный $\triangle$ DEF, получимъ: $\triangle$ ABC ∞ $\triangle$ DEF.

Упражненія. 749. Въ $\triangle$ ABC черезъ точку D на сторонѣ AB проведена прямая DE $\parallel$ BC. Опредѣлить длину этой прямой DE, если AB = 15 д., BC = 20 д. и AD = 4 д.

750. Построить $\triangle$, подобный данному.

751. Стороны треугольника ABC равны 9, 12 и 15 дюймамъ. Опредѣлить стороны треугольника DEF, который подобенъ треугольнику ABC, если бóльшая сторона $\triangle$ DEF равна 5 дюйм.

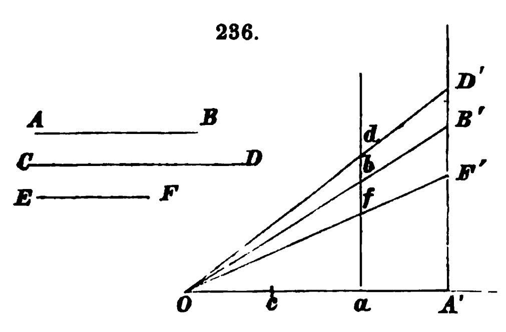
752. $\triangle$ ABC ∞ $\triangle$ *abc*. BD и *bd* — высóты. Опредѣлить основаніе AC и высоту BD, если AB = 15 д., *ab* = 6 д., *ac* = 5 д. и *bd* = 4 д.

753. Всѣ равносторонніе треугольники подобны. Почему?

754. Продолжить стороны треугольника AB и CB (черт. 235), на продолженіяхъ отложить части BD = $^1/_2$ AB и BE = $^1/_2$ BC. Доказать, что DE $\parallel$ AC.

235.

755. Данъ прямоугольный треугольникъ. Изъ вершины прямаго угла опущенъ перпендикуляръ на гипотенузу. Доказать, что полученные треугольники подобны данному и между собою.



756. При помощи построенія подобныхъ треугольниковъ весьма удобно увеличивать и уменьшать данныя прямыя въ данномъ отношеніи.

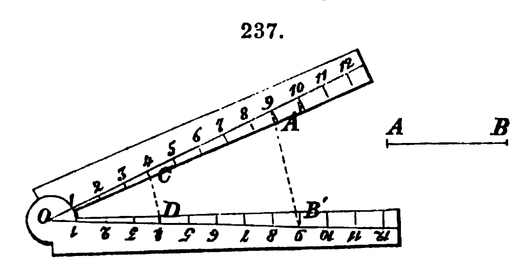
Положимъ, надо прямыя AB, CD, EF уменьшить въ отношеніи 2 : 3 (черт. 236). Для этого на прямой OA′

откладываютъ три равныя части $Oc = ca = aA'$, черезъ точки a и A' проводятъ двѣ параллельныя прямыя $ad \parallel A'D'$; затѣмъ, откладываютъ $A'B' = AB$, $A'D' = CD$ и $A'F' = EF$, наконецъ, проводятъ прямыя OB', OD' и OF'. Линіи ab, ad и af и будутъ искомыя прямыя.

Въ самомъ дѣлѣ: $\triangle Oba \backsim \triangle OB'A'$ (§ 746), а потому $ab : A'B' = Oa : OA'$ или $ab : AB = 2:3$; такъ же и $\triangle Oda \backsim \triangle OD'A'$, а потому $ad : A'D' = Oa : OA'$ или $ad : CD = 2:3$ и т. д.

757. На подобіи треугольниковъ основано устройство *пропорціональнаго циркуля* (черт. 237). Приборъ этотъ состоитъ изъ двухъ равныхъ линеекъ съ равными раздѣленіями; линейки соединены шарниромъ. Съ помощью пропорціональнаго циркуля можно дѣлить прямыя на равныя части и измѣнять ихъ длину въ данномъ отношеніи.

237.



Пусть, напр., надо найти $^4/_9$ данной прямой AB. Растворяютъ обыкновенный циркуль на длину AB, раздвигаютъ, затѣмъ, линейки на столько, чтобы можно было одну ножку циркуля поставить на дѣленіе 9 одной линейки, а другую на дѣленіе 9 другой линейки. Тогда разстояніе CD между дѣленіями 4 и 4 составитъ $^4/_9$ прямой AB.

Въ самомъ дѣлѣ: $\triangle OCD \backsim \triangle OA'B'$ (§ 748), а потому $CD : A'B' = OC : OA'$ или $CD : AB = 4 : 9$, другими словами: $CD = {^4/_9} AB$.

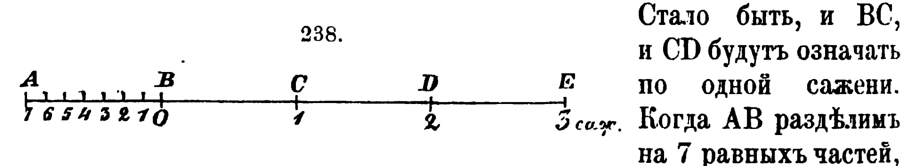
---

758. Для построенія линій, пропорціональныхъ даннымъ, весьма удобно примѣнять *масштабъ*.

Масштабомъ можетъ служить всякая прямая линія, принятая за единицу длины. Такая прямая съ раздѣленіями на части называется *простымъ масштабомъ*.

Пусть прямая AB (черт. 238) выражаетъ одну сажень. На ея продолженіи отложимъ части $BC = CD = DE$, которыя равны AB. Стало быть, и BC, и CD будутъ означать по одной сажени. Когда AB раздѣлимъ на 7 равныхъ частей, то каждая часть представитъ футъ. Если теперь намъ нужно представить на чертежѣ прямую въ 2 саж. 4 фута, то стоитъ только

238.



одну ножку циркуля поставить въ точку D, а другую на прямой AB въ точку 4 и, затѣмъ, отложить, гдѣ требуется, взятую циркулемъ длину.

Если мы будемъ брать различныя длины по этому масштабу, то всѣ онѣ будутъ одинаково уменьшены и во столько разъ, во сколько разъ AB меньше 1 сажени; другими словами: мы получимъ прямыя, пропорціональныя даннымъ.

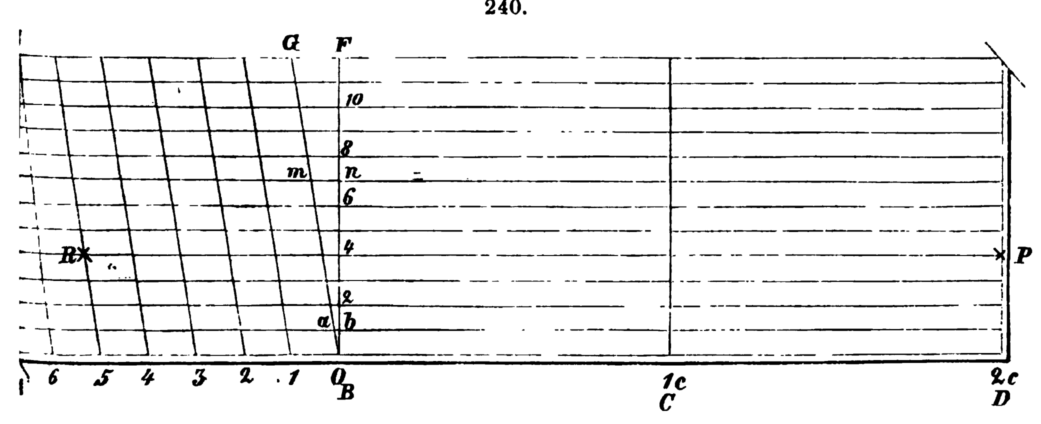
Если такой масштабъ приложенъ къ чертежу какого нибудь предмета, то мы легко можемъ найти дѣйствительную длину каждой прямой, представленной на чертежѣ. Для этого стоитъ только нанести прямую, которую желаемъ измѣрить, при помощи циркуля, на масштабъ.

759. Можно построить масштабъ съ опредѣленнымъ уменьшеніемъ. Возьмемъ, напр., прямую AB (черт. 239), равную дюйму, и примемъ ее за сажень; седьмая часть AB представитъ одинъ масштабный футъ. Такъ какъ дюймъ есть $^1/_{84}$ часть сажени, то наша масштабная сажень AB въ 84 раза меньше настоящей сажени. Такой масштабъ называется масштабомъ *въ* $^1/_{84}$ *долю*. Всѣ линіи, построенныя съ помощью этого масштаба, будутъ въ 84 раза меньше взятыхъ съ натуры.

239.

760. Для того, чтобы возможно было брать части болѣе мелкія, употребляется, такъ называемый, *поперечный масштабъ*. Построимъ масштабъ *въ* $^1/_{48}$ *долю* такъ, чтобы на немъ можно было брать не

240.



только сажени и футы, но и дюймы. Намъ извѣстно, что вершокъ $= ^1/_{48}$ саж. Примемъ поэтому вершокъ за масштабную сажень.

Пусть AB = BC = CD = 1 вер. или одной масштабной сажени (черт. 240). Изъ точекъ A, B, C и D возставимъ перпендикуляры

къ AD; раздѣлимъ AB на 7 равныхъ частей (футы); на перпендикулярѣ AE отложимъ 12 равныхъ частей произвольной длины и изъ точекъ дѣленія проведемъ прямыя, параллельныя AD. Наконецъ, точку E соединимъ съ шестымъ дѣленіемъ AB и проведемъ черезъ точки 5, 4, 3, 2, 1 и 0 прямыя параллельныя линіи E6. Все это построеніе должно быть сдѣлано весьма точно.

Такой масштабъ, какъ сейчасъ увидимъ, даетъ возможность брать и дюймы.

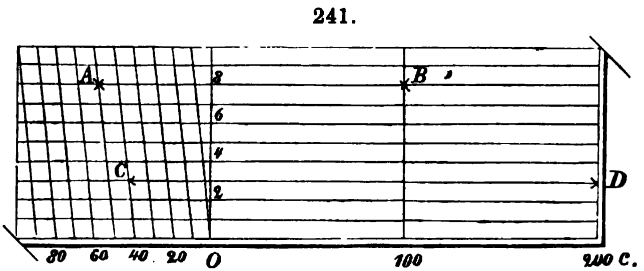
Въ треугольникѣ OGF проведены прямыя, параллельныя сторонѣ GF, а потому $\triangle Oab$, $\triangle Omn$ и другіе подобны треугольнику OGF (§ 745); слѣдовательно, стороны этихъ треугольниковъ пропорціональны: $ab : GF = Ob : OF$, но отношеніе $Ob : OF = 1/12$ (по построенію), а потому и $ab : GF = 1/12$, т. е. $ab = 1/12$ GF; а такъ какъ $GF = 1$ футу, то $ab = 1$ дюйму.

Изъ подобія треугольниковъ Omn и Oab слѣдуетъ, что $mn : ab = On : Ob$; но On въ 7 разъ больше Ob, стало быть, и mn въ 7 разъ больше ab, т. е. $mn = 7$ дюймамъ.

И такъ, чтобы отложить на прямой часть въ 2 саж. 5 ф. 4 дюйма, надо поставить циркуль на четвертой линейкѣ снизу одной ножкой въ точку P, а другой въ R и нанести это разстояніе на данную прямую.

На чертежѣ 241 представленъ масштабъ 100 саженъ въ дюймѣ (масштабъ въ $1/8400$ долю), который употребляется обыкновенно для черченія плановъ мѣстности. Вправо отъ O отсчитываются сотни саженъ, влѣво десятки, а единицы отсчитываются по горизонтальнымъ линейкамъ снизу вверхъ. Такъ напр., AB представитъ прямую въ 158 саж., $CD = 243$ саж.

241.

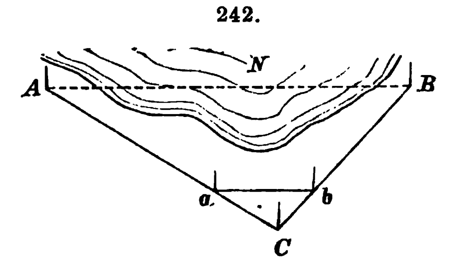


---

761. При измѣреніи разстояній мы можемъ пользоваться подобными треугольниками.

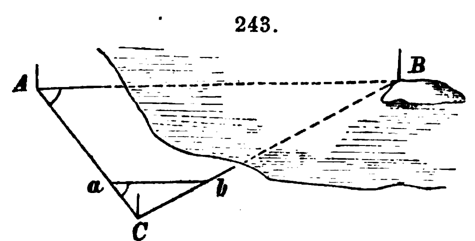
Положимъ, нужно опредѣлить разстояніе между двумя точками A и B (черт. 242), которыя раздѣлены препятствіемъ N.

242.



Выберемъ третью точку C такъ, чтобы отъ нея можно было провести прямыя CA и CB. Измѣряемъ эти прямыя и откладываемъ на нихъ части Ca и Cb, имъ пропорціональныя. Напр., если CA = 100 саж., CB = 75 саж., то откладываемъ $Ca = 20$ саж., а $Cb = 15$ саж. Проведя прямую ab, получимъ $\triangle Cab \infty \triangle CAB$ (§ 748). Затѣмъ, измѣривъ прямую ab, найдемъ длину AB изъ пропорціи: $AB : ab = CA : Ca$ или, полагая ab равной 28 саж.,

$AB : 28 = 100 : 20$, откуда $AB = \frac{28.100}{20} = 140$ саж.



Еще примѣръ: положимъ, требуется измѣрить разстояніе между двумя точками A и B (черт. 243), изъ которыхъ одна B недоступна.

Выбираемъ точку C, отъ которой провѣшиваемъ прямую CA и на сколько возможно CB; на прямой CA отъ точки C отложимъ часть Ca и около точки a строимъ уголъ Cab, равный углу A. Тогда получимъ $\triangle Cab \infty \triangle CAB$ (§ 746). Разстояніе AB опредѣлится изъ пропорціи

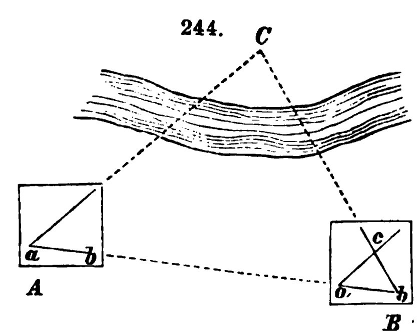
$$AB : ab = CA : Ca.$$

Если, напр., CA = 80 саж., $Ca = 25$ саж. и $ab = 45$ саж., то получимъ:

$$AB : 45 = 80 : 25,$$

$$\text{откуда } AB = \frac{45.80}{25} = 144 \text{ саж.}$$

762. Для измѣренія разстояній можно пользоваться мензулой, при помощи которой строятъ на бумагѣ треугольники, подобные даннымъ на землѣ.



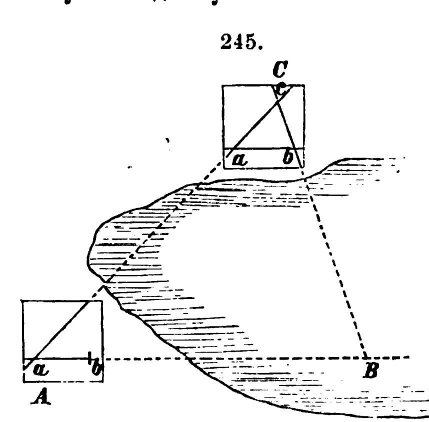
Построимъ треугольникъ, подобный ABC (черт. 244).

Измѣримъ цѣпью разстояніе между точками A и B и нанесемъ это разстояніе въ какомъ нибудь масштабѣ на мензульную доску.

Такимъ образомъ, двѣ точки a и b уже имѣются на бумагѣ. Чтобы получить третью, устанавливаемъ мензулу надъ точкой A, приводимъ доску въ горизонтальное положеніе и, приложивъ алидаду къ прямой ab, поворачиваемъ доску такъ, чтобы черезъ діоптры

можно было визировать на точку В; тогда, закрѣпивъ мензульную доску, визируемъ на точку С, поворачивая (§ 127) на сколько нужно алидаду, и проводимъ по линейкѣ прямую отъ точки *a* по направленiю къ С. Перенеся мензулу изъ точки А въ В, устанавливаемъ ее такъ, чтобы *ba* направлялась отъ В къ А, прикладываемъ алидаду къ точкѣ *b* и визируемъ опять на точку С; проведя по линейкѣ прямую отъ *b* по направленiю къ С, получимъ третью точку *c*. Полученный на мензулѣ △ *abc* подобенъ (§ 746) данному △ АВС. Вслѣдствiе пропорцiональности сторонъ подобныхъ треугольниковъ прямыя АС и ВС получатся на чертежѣ въ томъ же масштабѣ, въ какомъ была взята АВ, а потому, измѣряя *ac* и *bc* этимъ масштабомъ, получимъ длину АС и ВС.

245.



763. Пусть разстоянiе АВ (черт. 245) извѣстно; нужно опредѣлить разстоянiя АС и СВ, если въ точкѣ В нельзя поставить мензулы.

Построимъ треугольникъ, подобный △ АВС. Проведемъ сначала на доскѣ мензулы прямую *ab*, которая представляетъ въ масштабѣ разстоянiе АВ; потомъ поставимъ мензулу въ точку А, приведемъ доску въ горизонтальное положенiе и направимъ *ab* по АВ; приложивъ край алидады къ точкѣ *a*, визируемъ на точку С и проводимъ отъ *a* линiю неопредѣленной длины; перенесемъ, затѣмъ, мензулу въ С и, приведя ея доску въ горизонтальное положенiе, повернемъ такъ, чтобы проведенная отъ точки *a* прямая была въ направленiи СА; приложивъ алидаду къ точкѣ *b*, визируемъ на точку В и чертимъ черезъ точку *b* прямую, которая пересѣчетъ въ точкѣ *c* линiю, проведенную отъ *a*. Полученный такимъ образомъ △ *abc* подобенъ △ АВС.

764. Въ предъидущихъ двухъ способахъ построенiя треугольниковъ (§§ 762 и 763) при помощи мензулы опредѣлялось только положенiе на чертежѣ третьей точки по двумъ даннымъ. Показанный *способъ опредѣленiя третьей точки по двумъ даннымъ при помощи однихъ визированiй называется засѣчкой.*

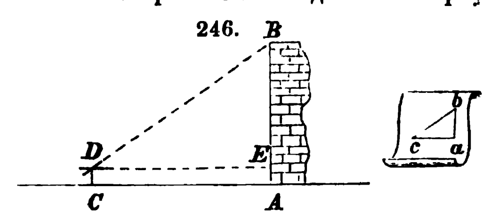
Засѣчка, показанная въ § 762, называется *прямой* или засѣчкой *впередъ,* а засѣчка, сдѣланная, какъ показано въ § 763, называется *обратной.*

765. Такъ какъ высоты подобныхъ треугольниковъ пропорціональны сходственнымъ сторонамъ, то, въ какомъ масштабѣ будутъ уменьшены стороны треугольника, въ томъ же масштабѣ уменьшится и высота. Изъ этого слѣдуетъ, что вмѣсто измѣренія площади треугольника, даннаго на землѣ, можно измѣрить площадь треугольника, подобнаго ему, на бумагѣ.

Напр., если въ данномъ треугольникѣ основаніе = 115 саж., а высота = 72 саж., то на планѣ получимъ треугольникъ, у котораго основаніе = 115 масштабныхъ саженъ, а высота 72 масштабныхъ саженъ; слѣдовательно, число квадратныхъ единицъ площади будетъ одно и то же въ обоихъ случаяхъ.

---

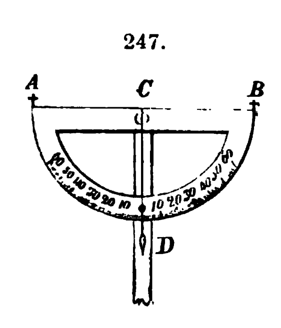
766. Для измѣренія высоты предметовъ тоже можно пользоваться построеніемъ подобныхъ треугольниковъ.



Положимъ, напр., нужно измѣрить высоту AB (ч. 246). Въ произвольно взятой точкѣ C устанавливаемъ инструментъ CD для измѣренія угловъ.

Наносимъ на бумагу разстояніе CA въ какомъ нибудь масштабѣ (*ca*), изъ точки *a* возставляемъ перпендикуляръ къ *ca*; измѣривъ, наконецъ, уголъ BDE, строимъ ему равный при точкѣ *c*. Тогда получимъ $\triangle abc \backsim \triangle$ BDE (§ 746). Измѣривъ тѣмъ же масштабомъ *ab*, получимъ величину BE, къ которой нужно ёще прибавить EA, равную высотѣ инструмента DC. Полученная сумма дастъ намъ искомую высоту AB.

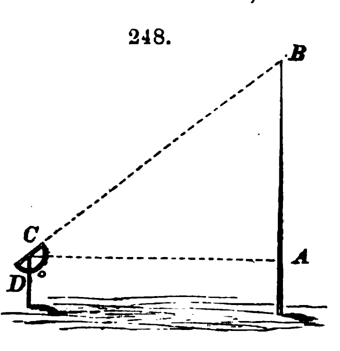
767. Для измѣренія угловъ *наклоненія*, какъ $\angle$ BDE (черт. 246), употребляются различныя инструменты, называемые *высотомѣрами*.



Простѣйшій высотомѣръ представляетъ половину круга, раздѣленнаго на градусы (черт. 247); полукругъ прикрѣпленъ къ подставкѣ въ точкѣ C, около которой можетъ вращаться. Въ концахъ линейки AB находятся приспособленія, съ помощью которыхъ она наводится на предметъ; по серединѣ къ линейкѣ прикрѣпленъ отвѣсъ CD. Счетъ градусовъ идетъ отъ середины дуги, гдѣ стоитъ O, въ обѣ стороны.

Для измѣренія угла BCA (черт. 248) приборъ втыкается *отвѣсно* въ землю; затѣмъ, наводятъ линейку на точку B, тогда нить отвѣса укажетъ число градусовъ измѣряемаго угла. Если, напр., нить отвѣса CD указываетъ на 25°, то уголъ DCB долженъ имѣть 35°+90°=115°, но прямая CA горизонтальна; значитъ, уголъ DCA прямой, а потому уголъ BCA, который равенъ ∠ DCB безъ ∠ DCA, составитъ 115°—90°=25°.

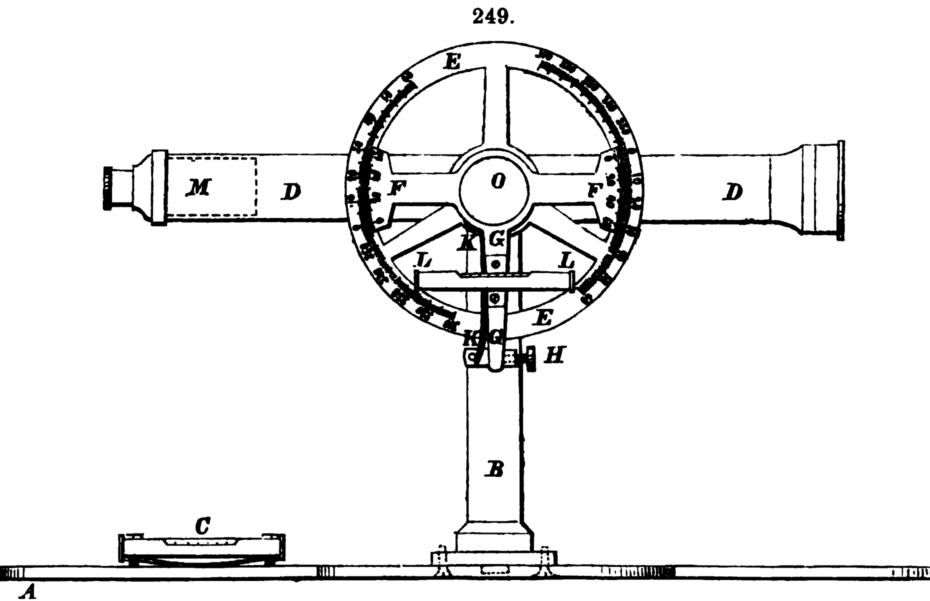
248.



768. Болѣе усовершенствованный высотомѣръ есть такъ называемый *кипрегель-высотомѣръ*. Главныя части этого инструмента слѣдующія:

Линейка AA (черт. 249) съ привинченной къ ней колонкой B и уровнемъ C. Къ колонкѣ прикрѣпленъ цилиндръ, въ которомъ вращается стержень O съ придѣланными къ нему зрительной

249.

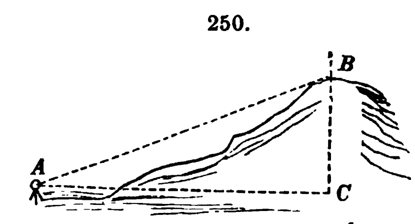


трубой DD и кругомъ EE, такъ что труба и кругъ вращаются вмѣстѣ. Зрительная труба и кругъ (кругъ высотъ) придѣланы къ оси O съ разныхъ концовъ; цилиндръ, въ которомъ вращается ось O, прикрѣпленный, какъ было сказано, къ колонкѣ B, находится между кругомъ и трубой, а потому на чертежѣ не показанъ. На оси O передъ кругомъ надѣто кольцо съ линейкой FF и рычагомъ GG. При помощи винта H и пружины KK, дѣйствующихъ на рычагъ, линейка FF

приводится и удерживается въ горизонтальномъ положеніи. Горизонтальное положеніе линейки повѣряется уровнемъ LL, прикрѣпленнымъ къ рычагу. Линейка FF съ расширенными концами, на которыхъ сдѣланы дѣленія верніера. При верніерахъ часто имѣются увеличительныя стекла. Лимбъ раздѣленъ на градусы и полградусы. Когда труба находится въ горизонтальномъ положеніи, какъ на нашемъ чертежѣ, то нули лимба совпадаютъ съ нулями верніеровъ. Если будемъ смотрѣть изъ центра круга высотъ, то вправо отъ нулей лимба идетъ счетъ градусовъ $0^{0}, 10^{0}, 20^{0}$, до 60^{0}, а влѣво 0^{0} (или 360^{0}), 350^{0}, 340^{0} до 310^{0}.

При помощи кипрегеля такого устройства можно измѣрить уголъ возвышенія или пониженія съ точностью до $1'$.

769. Для измѣренія высоты предмета, какъ было показано (§ 766), кромѣ угла A (черт. 250), необходимо знать разстояніе AC или AB. Когда будетъ извѣстенъ $\angle$A и разстояніе AC или AB, то можно будетъ построить прямоугольный ($\angle c = d$) треугольникъ, подобный $\triangle$ABC, и измѣрить высоту BC, по тому же масштабу, по которому была проведена прямая AC или AB.



Но вмѣсто того, чтобы строить каждый разъ подобные треугольники, пользуются или 1) *таблицами*, при помощи которыхъ можно найти высоты, соотвѣтствующія даннымъ разстояніямъ и угламъ возвышенія, или 2) пользуются такъ называемымъ *масштабомъ высотъ*, который представляетъ изъ себя ничто иное, какъ систему прямоугольныхъ треугольниковъ съ различными углами (величина которыхъ означена числомъ градусовъ) и различными катетами, взятыми въ опредѣленномъ масштабѣ.

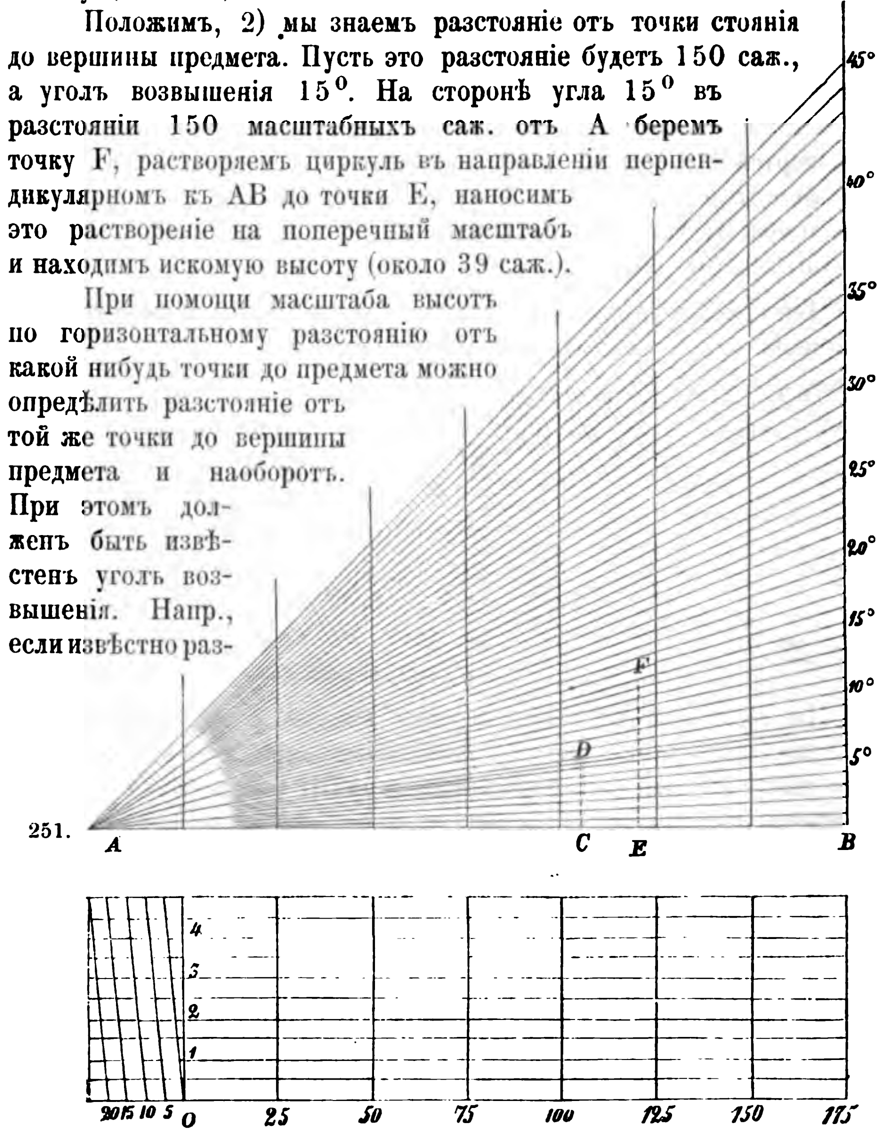
770. Чертежъ 251 представляетъ масштабъ высотъ. Прямая AB 200 саж. длины (масшт. 50 саж. въ дюймѣ). Изъ точки A проведены прямыя, образующія съ AB различные углы. Черезъ каждые 25 саж. къ прямой AB возставлены перпендикуляры.

Положимъ, 1) мы находимся отъ предмета, высоту котораго желаемъ знать, на разстояніи 130 саж. по горизонтальной линіи и видимъ его вершину подъ угломъ $7^{0}30'$ надъ горизонтальной. Для опредѣленія высоты предмета ставимъ ножку циркуля въ C въ 130 саженяхъ отъ A, а другую въ точку D на сторонѣ угла $7^{0}30'$ такъ, чтобы CD была перпендикулярна къ AB; наносимъ это раствореніе

циркуля на поперечный масштабъ и находимъ длину CD или искомую высоту (17 саж.).

Положимъ, 2) мы знаемъ разстояніе отъ точки стоянія до вершины предмета. Пусть это разстояніе будетъ 150 саж., а уголъ возвышенія 15°. На сторонѣ угла 15° въ разстояніи 150 масштабныхъ саж. отъ A беремъ точку F, растворяемъ циркуль въ направленіи перпендикулярномъ къ AB до точки E, наносимъ это раствореніе на поперечный масштабъ и находимъ искомую высоту (около 39 саж.).

При помощи масштаба высотъ по горизонтальному разстоянію отъ какой нибудь точки до предмета можно опредѣлить разстояніе отъ той же точки до вершины предмета и наоборотъ. При этомъ долженъ быть извѣстенъ уголъ возвышенія. Напр., если извѣстно разстояніе AF отъ точки стоянія до вершины (150 саж.), то для опредѣленія разстоянія по горизонтальной линіи стоитъ только измѣрить по масштабу прямую AE (около 145 с.).

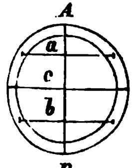


251.

771. Въ кипрегелѣ-высотомѣрѣ можетъ быть сдѣлано приспособленіе для измѣренія разстояній. Такой кипрегель носитъ названіе *кипрегеля-высотомѣра-дальномѣра*.

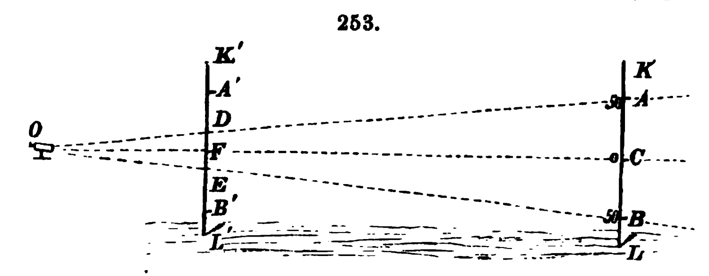
Приспособленіе это заключается въ сѣткѣ (черт. 252), которая помѣщена внутри выдвижной трубки M (черт. 249). Сѣтка состоитъ изъ одной вертикальной нити AB (черт. 252) и трехъ горизонтальныхъ *a*, *b* и *c*.

252.



Чтобы можно было пользоваться кипрегелемъ, какъ *дальномѣромъ*, нужно еще приготовить рейку (длинный деревянный брусокъ съ дѣленіями) слѣдующимъ образомъ: на ровной мѣстности отмѣряютъ разстояніе въ 100 саженъ, на одномъ концѣ ставятъ шесть KL (черт. 253), а на другомъ устанавливаютъ кипрегель O, визируютъ на шестъ и отмѣчаютъ на немъ ту часть AB, которая видна между горизонтальными нитями трубы *a* и *b*. Затѣмъ, разстояніе AB дѣлятъ на 100 равныхъ частей. Счетъ дѣленій идетъ отъ середины рейки, гдѣ ставятъ нуль, вверхъ и внизъ до 50.

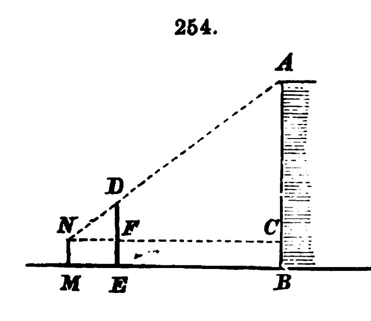
253.



Если переставить рейку изъ L въ L′, то число дѣленій рейки между точками D и E (которыя будутъ покрыты нитями *a* и *b*) покажетъ число саженъ въ линіи OF. Въ самомъ дѣлѣ: во сколько разъ мы приблизимъ или удалимъ рейку отъ кипрегеля, во столько же разъ уменьшится или увеличится часть рейки, видимая между горизонтальными нитями трубы, потому что $\triangle OAB \infty \triangle ODE$, а въ подобныхъ треугольникахъ стороны и высоты пропорціональны. Такъ на разстояніи рейки отъ кипрегеля въ 100 саженъ будутъ видны 100 дѣленій рейки между нитями *a* и *b*, на разстояніи 25 саж. будутъ видны 25 дѣленій и т. д.

Такимъ образомъ, чтобы узнать, на сколько саженъ удалена отъ насъ какая нибудь точка, отсылаемъ рейку въ эту точку и визируемъ на нее въ трубу; число дѣленій рейки между нитями кипрегеля покажетъ намъ, на сколько саженъ удалена отъ насъ точка.

254.



772. Есть возможность опредѣлить высоту предмета при помощи только цѣпи и кольевъ.

Положимъ, что надо опредѣлить высоту AB (черт. 254). На нѣкоторомъ

разстояніи отъ предмета AB вбиваемъ колъ DE; отойдя еще нѣсколько далѣе, вбиваемъ другой колъ NM такъ, чтобы вершины обоихъ кольевъ N и D и вершина предмета A были видны по одной прямой линіи NA. Затѣмъ, измѣряемъ 1) разстояніе NC (или MB) отъ мѐньшаго кола до предмета, 2) разстояніе между кольями NF (или ME) и 3) разницу между высотой кольевъ DF. Такъ какъ $\triangle NAC \infty \triangle NDF$, то можно составить пропорцію

$$AC : DF = NC : NF,$$

въ которой DF, NC и NF извѣстны. Стало быть, AC можетъ быть найдена при помощи вычисленія. Пусть, напр., DF=9 фут., NC=56 ф. и NF = 12 ф.; тогда изъ пропорціи

$$AC : 9 = 56 : 12 \text{ получимъ } AC = \frac{9 \times 56}{12} = 42 \text{ ф.}$$

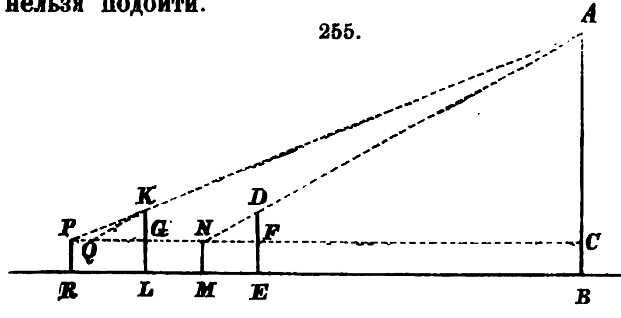
Чтобы найти высоту AB, нужно только къ найденной величинѣ AC прибавить CB, равную высотѣ мѐньшаго кола NM.

Если, напр., эта высота равна 4 ф., то искомая высота AB = 42 ф. + 4 ф. = 46 ф.

Такимъ образомъ, хотя и не особенно точно, но все же можетъ быть найдена высота предмета, основаніе котораго намъ доступно.

Если опредѣляемая высота недоступна, то и тогда возможно ее найти подобнымъ же образомъ.

Положимъ, надо измѣрить высоту AB (черт. 255), къ которой нельзя подойти.



Тогда, кромѣ первыхъ двухъ кольевъ DE и NM, ставимъ еще два KL и PR, равной длины съ первыми, т. е. чтобы KL=DE и PR=NM. Если вообразимъ теперь прямую KQ, параллельную AN, то получимъ $\triangle KPQ$, подобный $\triangle APN$. Высота этихъ треугольниковъ AC и KG должна быть пропорціональна сторонамъ PN и PQ, т. е.

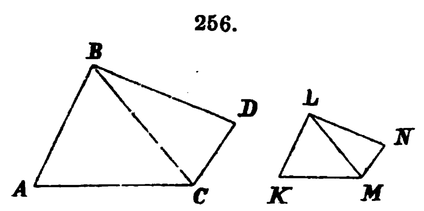
$$AC : KG = PN : PQ.$$

KG и PN могутъ быть измѣрены, а PQ получится, если изъ PG вычтемъ QG, которая равна NF, потому что $\triangle KQG = \triangle DNF$.

Напр., если KG = 8 ф., PN = 35 ф., PG = 20 ф., NF = 15 ф., то AC : 8 = 35 : 5, откуда AC = 56 ф. Приложивъ къ полученной величинѣ высоту малаго кола, найдемъ высоту AB.

Подобные многоугольники.

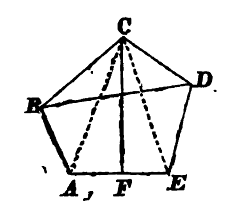
773. Пусть будутъ два подобныхъ треугольника ABC и KLM (черт. 256). На сторонахъ BC и LM построимъ два другихъ подобныхъ треугольника BDC и LNM. Получатся два четыреугольника ABDC и KLNM. Въ нихъ $\angle A = \angle K$ и $\angle D = \angle N$, какъ принадлежащіе подобнымъ треугольникамъ, а $\angle B = \angle L$ и $\angle C = \angle M$, какъ составленные изъ угловъ подобныхъ треугольниковъ. Стороны этихъ четыреугольниковъ пропорціональны, потому что всѣ онѣ пропорціональны діагоналямъ BC и LM, какъ стороны подобныхъ треугольниковъ. Если на сходственныхъ сторонахъ BD и LN построимъ еще подобные треугольники, то получимъ пятиугольники, у которыхъ углы одного будутъ равны угламъ другаго и стороны одного будутъ пропорціональны сторонамъ другаго.

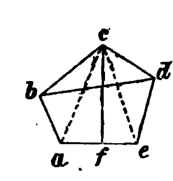


774. *Два многоугольника, у которыхъ углы одного равны порознь угламъ другаго и стороны одного пропорціональны сходственнымъ сторонамъ другаго, называются подобными.*

775. *Теорема. Въ подобныхъ многоугольникахъ сходственныя діагонали и другія сходственныя линіи пропорціональны сходственнымъ сторонамъ.*

Пусть даны подобные многоугольники ABCDE и *abcde* (черт. 257), т. е. такіе, у которыхъ $\angle A = \angle a$, $\angle B = \angle b$, $\angle C = \angle c$ и т. д. и $AB : ab = BC : bc = AE : ae$ и такъ далѣе; въ этихъ многоугольникахъ проведены діагонали BD и *bd* и перпендикуляры CF и *cf* къ сходственнымъ сторонамъ AE и *ae*. Докажемъ, что діагонали BD и *bd* и перпендикуляры CF и *cf* пропорціональны какимъ нибудь сходственнымъ сторонамъ, напр., сторонамъ AB и *ab*.





1) Въ треугольникахъ BCD и *bcd* — $BC : bc = CD : cd$ и, кромѣ того, $\angle BCD = \angle bcd$, потому что это стороны и углы данныхъ подобныхъ многоугольниковъ. Значитъ, $\triangle BCD \infty \triangle bcd$ (§ 748), и потому $BD : bd = BC : bc$; а подставивъ вмѣсто отношенія $BC : bc$

равное ему по условію AB: *ab*, получимъ BD : *bd* = AB : *ab*, т. е. сходственныя діагонали пропорціональны сходственнымъ сторонамъ AB и *ab*.

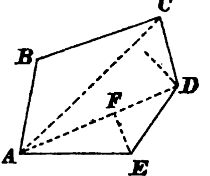
2) Проведемъ діагонали CA и CE и сходственныя имъ *ca* и *ce*. Треугольники ABC и *abc* подобны, потому что AB : *ab* = BC : *bc* и ∠ABC = ∠*abc* (§ 748). Изъ подобія этихъ треугольниковъ слѣдуетъ, что ∠BAC = ∠*bac*. Треугольники ACE и *ace* подобны тоже, такъ какъ по доказанному (сходственныя діагонали пропорціональны сходственнымъ сторонамъ) AC : *ac* = AE : *ae*, а углы CAE и *cae* равны между собой, потому что они получатся, если изъ равныхъ угловъ BAE и *bae* вычтемъ равные ∠BAC и ∠*bac*. А такъ какъ въ подобныхъ треугольникахъ высоты пропорціональны сходственнымъ сторонамъ (§ 747), то CF : *cf* = AE : *ae*.

Подставивъ вмѣсто отношенія AE : *ae*, равное ему по условію AB : *ab*, получимъ CF : *cf* = AB : *ab*, что и требовалось доказать.

776. Доказанное только что свойство подобныхъ многоугольниковъ даетъ возможность измѣрить площадь участка земли, не производя нужныхъ для этого измѣреній на самомъ участкѣ.

Пусть данный участокъ земли имѣетъ видъ многоугольника. Предположимъ, что на бумагѣ мы имѣемъ многоугольникъ ABCDE (черт. 258), подобный данному на землѣ и построенный по извѣстному масштабу.

258.



На основаніи предъидущей теоремы всѣ сходственныя линіи многоугольника ABCDE и даннаго на землѣ пропорціональны; поэтому сколько масштабныхъ саженъ имѣетъ прямая AD и перпендикуляръ къ ней EF, столько же саженъ имѣютъ сходственныя прямыя и на данномъ участкѣ земли. Стало быть, если мы вычислимъ площадь треугольника AED, то получимъ то же самое число квадратныхъ единицъ, которое получилось бы, если бы мы опредѣлили площадь соотвѣтствующаго треугольника на данномъ участкѣ.

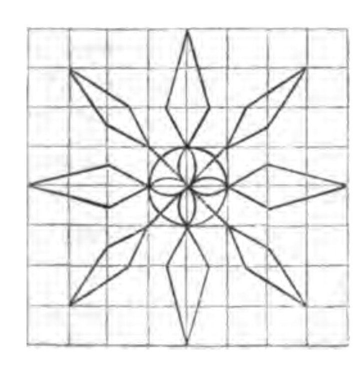
Точно также можно разсуждать и относительно треугольниковъ ABC и ADC. Сумма же площадей всѣхъ треугольниковъ выразитъ собою площадь даннаго участка земли.

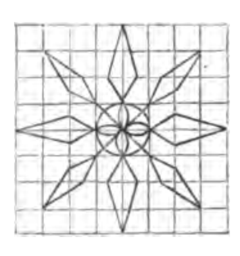
777. Чтобы построить многоугольникъ, подобный данному, можно данный многоугольникъ раздѣлить на треугольники и строить послѣдовательно подобные имъ треугольники (§ 773). Но кромѣ этого способа, для построенія подобныхъ фигуръ существуютъ и другіе.

778. Фигуру, подобную данной, можно построить слѣдующимъ образомъ. Данную фигуру разграфляютъ на квадраты двумя рядами

параллельныхъ линій. Затѣмъ, строятъ такую же сѣтку изъ квадратовъ, которыхъ стороны больше или меньше сторонъ первыхъ квадра-

259.





товъ, смотря по тому, хотятъ увеличить или уменьшить фигуру. Наконецъ, въ этихъ квадратахъ проводятъ линіи, сходственныя съ тѣми, которыя проведены въ квадратахъ данной фигуры (черт. 259).

779. Фигуру, подобную данной, можно построить еще другимъ способомъ. Черезъ данную фигуру (ч. 260) проведемъ прямую AB, на которой отложимъ равныя части AC, CE и т. д. и изъ точекъ дѣленія возставимъ перпендикуляры; затѣмъ, проведемъ прямую *ab*, отложимъ на ней части *ac*, *ce* и т. д. мѣньшія, чѣмъ на прямой AB (если хотимъ уменьшить фигуру), и изъ точекъ дѣленія возставимъ перпендикуляры; далѣе, уменьшимъ перпендикуляры CD, EF и проч. въ отношеніи, равномъ AC : *ac* или AB : *ab* (§ 756), отложимъ полученныя прямыя *cd*, *ef* и проч. на перпендикулярахъ къ прямой *ab*; соединивъ, наконецъ, точки *a*, *d*, *f* и другія подобно тому, какъ соединены точки A, D, F...., получимъ фигуру, подобную данной.

260.

Упражненія. 780. Построить многоугольникъ, подобный данному, увеличивъ стороны въ отношеніи 3 : 5 (§§ 756, 773).

781. Построить многоугольникъ, подобный данному, такъ чтобы стороны даннаго многоугольника относились къ сторонамъ новаго, какъ данныя прямыя $a:b$.

782. Построить на бумагѣ многоугольникъ, подобный данному на классной доскѣ (масштабъ — 1 ф. — 1 вершку) и найти площадь даннаго многоугольника, произведя всѣ нужныя измѣренія на бумагѣ.

783. Построить фигуру, подобную данной, по способу квадратовъ (§ 778).

784. Построить фигуру, подобную данной, при помощи перпендикуляровъ (§ 779).

XV.

Понятіе о съемкѣ плановъ.

785. *Планомъ* данной мѣстности называется чертежъ, изображающій фигуру, подобную той, какую занимаетъ эта мѣстность. На планахъ обозначаются также всѣ мѣстные предметы, напр., рѣка, прудъ, постройка и проч.

Планъ изображаетъ мѣстность такою, какою она представилась бы намъ, если бы мы смотрѣли на нее издали сверху.

786. Всѣ дѣйствія, производимыя на мѣстности для составленія плана, называются *съемкой.*

Съемка состоитъ изъ двухъ частей: 1) изъ опредѣленія *главныхъ точекъ* плана и 2) изъ *нанесенія подробностей.* Главными точками называются такія, которыя наносятся на планъ прежде всѣхъ прочихъ; онѣ избираются на мѣстности произвольно и обозначаются вѣхами. Разумѣется, главныя точки должны быть выбраны по возможности на мѣстахъ открытыхъ, т. е. чтобы вѣхи можно было видѣть издали. Отдѣльныя большія деревья, колокольни и другіе замѣтные предметы принимаются также за главныя точки.

787. Чтобы нанести на планъ главныя точки, надо прежде всего какъ можно точнѣе нанести двѣ основныя точки или основную прямую *(базисъ).* Для этого на мѣстности выбираютъ и означаютъ вѣхами линію, удобную для измѣренія. Такая линія должна быть вся доступна и пролегать по возможности на ровной горизонтальной мѣстности. Затѣмъ, измѣривъ линію для точности два, три раза, наносятъ ее на планъ слѣдующимъ образомъ: на листѣ бумаги, наклеенномъ на мензульной доскѣ, ставятъ точку *a,* устанавливаютъ потомъ мензулу на мѣстности въ одинъ изъ концовъ основной линіи и поворачиваютъ доску такъ, чтобы который нибудь ея край находился въ направленіи магнитной стрѣлки (бусоль). Тогда наводятъ алидаду на другой конецъ основной линіи и притомъ такъ, чтобы край алидады проходилъ черезъ точку *a,* проводятъ по алидадѣ отъ этой точки прямую, на которой и откладываютъ по масштабу длину основной линіи. (На краяхъ листа обозначается, какъ показано на чертежѣ 261, направленіе базиса; это дѣлается для того, чтобы впослѣдствіи точнѣе можно было бы приложить алидаду къ базису).

261.

Теперь не трудно нанести на планъ всѣ главныя точки. Стоитъ только провести на бумагѣ при помощи алидады прямыя отъ точки *a* по направленію ко всѣмъ

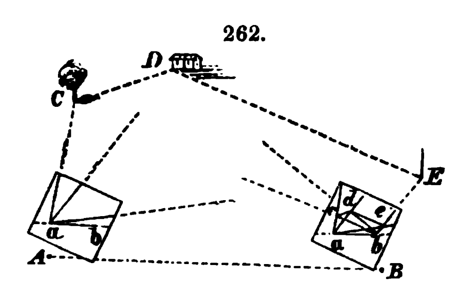
видимымъ главнымъ точкамъ, перенести, затѣмъ, мензулу въ другой конецъ основной линіи (*b*) и провести прямыя отъ этой точки въ направленіи тѣхъ же главныхъ точекъ мѣстности (прямая засѣчка § 764). Можно перейти съ мензулой и не въ другой конецъ основной прямой, а въ какую нибудь главную точку и обозначить ее на планѣ обратной засѣчкой, а всѣ прочія точки — прямой засѣчкой, визируя изъ этой и первой точки стоянія.

Такимъ образомъ, отъ пересѣченія прямыхъ образуются треугольники, подобные и одинаково расположенные съ треугольниками, которые получились бы на мѣстности, если соединить всѣ главные точки съ концами базиса или съ точками стояній; а потому и вся полученная фигура будетъ подобна многоугольнику, который образуется на мѣстности, если соединить прямыми главныя точки.

Для точности съемки надо избѣгать очень острыхъ угловъ или, какъ говорятъ, острыхъ засѣчекъ. Кромѣ того, надо замѣтить, что чѣмъ меньше мы изберемъ точекъ стоянія, тѣмъ точнѣе будетъ произведена съемка.

На чертежѣ 262 представлена съемка главныхъ точекъ изъ двухъ точекъ стоянія (A и B).

262.



788. Когда нанесены на планъ главныя точки, тогда приступаютъ къ нанесенію очертаній разныхъ предметовъ мѣстности: рѣкъ, озеръ, болотъ, лѣсовъ, луговъ, пахотныхъ полей, отдѣльныхъ строеній и проч. Въ этомъ и состоитъ нанесеніе подробностей.

Покажемъ разные способы нанесенія подробностей.

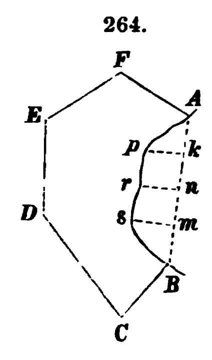
1) Положимъ, вблизи точекъ A и B (черт. 263), которыя нанесены на планъ (*ab*), есть ручей CDEF. Поставивъ въ поворотахъ

263.

этого ручья вѣхи C, D, E....., можно нанести эти точки на планъ точно такъ же, какъ наносились и главныя точки — засѣчками. Устанавливаютъ мензулу въ точкѣ A, направляютъ *ab* по AB и проводятъ прямыя *a*C, *a*D, *a*F; переносятъ, затѣмъ, мензулу въ B и, установивъ по *ba*, проводятъ прямыя *b*F, *b*D, *b*C; въ пересѣченіи получаются точки *c*, *d* и *f*, а эти точки соединяютъ кривой линіей уже на глазъ.

2) Положимъ, надо нанести на планъ поле ABCDEF (ч. 264), когда главныя точки A и B уже нанесены. Если изъ точки A не видна точка C, а изъ B — точка F, то можно, установивъ мензулу въ точкѣ B по линіи BA, провести на планѣ прямую въ направленіи BC, а затѣмъ, измѣривъ BC цѣпью, отложить по масштабу на планѣ. Нанеся, такимъ образомъ, точку C, можно нанести прочія точки или засѣчками, если только онѣ видны изъ двухъ нанесенныхъ уже точекъ, или же продолжать наносить указаннымъ только-что способомъ. Этимъ способомъ наносятся обыкновенно на планъ лѣсныя дороги.

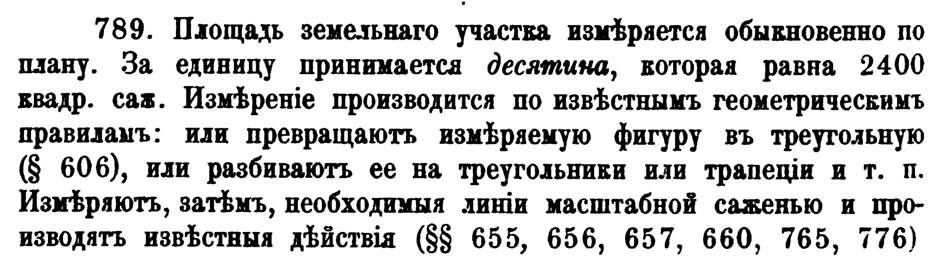
264.



3) Если поле ограничено кривою линіей, какъ напр., A*prs*B (черт. 264), то по линіи AB устанавливаютъ колья *k*, *n*, *m* и измѣряютъ разстоянія A*k*, *kn*, *nm*, *m*B, затѣмъ, при помощи эккера возставляютъ перпендикуляры *kp*, *nr*, *ms* и также измѣряютъ ихъ. Тоже самое вычерчивается въ извѣстномъ масштабѣ и на планѣ. Такимъ образомъ, точки *p*, *r*, *s* будутъ нанесены на планъ, и кривая A*prs*B вычерчивается уже на глазъ.

4) Если изъ какой нибудь точки A (ч. 265) видны точки B, C, D и E, опредѣляющія границы поля BCDE, то наносятъ на планъ точку A и устанавливаютъ въ ней мензулу; проводятъ, затѣмъ, на планѣ прямыя въ направленіи AB, AC, AD и AE; измѣривъ на мѣстности длины AB, AC, AD и AE, откладываютъ ихъ на планѣ по масштабу; опредѣливъ, такимъ образомъ, точки *b*, *c*, *d* и *e*, соединяютъ ихъ прямыми.

265.



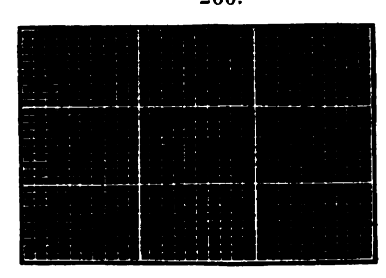
---

789. Площадь земельнаго участка измѣряется обыкновенно по плану. За единицу принимается *десятина*, которая равна 2400 квадр. саж. Измѣреніе производится по извѣстнымъ геометрическимъ правиламъ: или превращаютъ измѣряемую фигуру въ треугольную (§ 606), или разбиваютъ ее на треугольники или трапеціи и т. п. Измѣряютъ, затѣмъ, необходимыя линіи масштабной саженью и производятъ извѣстныя дѣйствія (§§ 655, 656, 657, 660, 765, 776)

Часто употребляется для измѣренія небольшихъ фигуръ и другой способъ. На тонкой прозрачной роговой пластинкѣ проводятъ рядъ параллельныхъ прямыхъ въ разстояніи одна отъ другой 60 мас-

штабныхъ саженъ, пересѣкаютъ ихъ перпендикулярами, отстоящими одинъ отъ другаго на 40 масштабныхъ саж. (черт. 266).

266.



Каждый изъ полученныхъ прямоугольниковъ представитъ площадь въ 2400 квадр. саж. (60 $\times$ 40), или одну десятину. Каждую сторону прямоугольника, въ свою очередь, дѣлятъ на 10 равныхъ частей и, проведя параллельныя, получаютъ маленькіе прямоугольники по 24 квадр. сажени каждый (потому что большіе прямоугольники раздѣлились на 100 равныхъ частей).

Для измѣренія площади накладываютъ пластинку на планъ и считаютъ число прямоугольниковъ, заключающихся въ фигурѣ. Если, напр., фигура содержитъ въ себѣ одинъ большой прямоугольникъ и 26 малыхъ, то площадь ея равна 1 десят. 624 кв. саж. ($24 \times 26 = 624$).

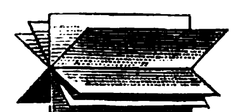
XVI.

Плоскости и прямыя.

790. *Плоскостью*, какъ мы уже знаемъ (§ 41), *называется поверхность, къ которой прямая линія прилегаетъ вся, если двѣ ея точки лежатъ на этой поверхности.*

791. Когда въ пространствѣ дана плоскость, то по ней всегда можно провести прямую линію и наоборотъ: когда въ пространствѣ дана прямая линія, то можно къ ней приложить (*провести черезъ нее*) плоскость.

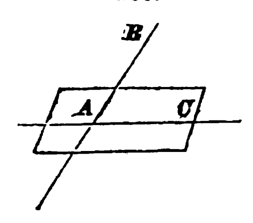
267.



Черезъ одну и ту же прямую можетъ быть проведено сколько угодно плоскостей (черт. 267); всѣ эти плоскости будутъ пересѣкаться въ этой прямой линіи.

Плоскость можно вращать въ пространствѣ около прямой линіи, проведенной по этой плоскости.

268.



792. Прямая можетъ пересѣчь плоскость только въ одной точкѣ, такъ какъ въ противномъ случаѣ прямая вся лежала бы на плоскости. Точка пересѣченія прямой съ плоскостью называется *основаніемъ* прямой.

793. Представимъ себѣ въ пространствѣ двѣ прямыя AB и AC, пересѣкающіяся въ точкѣ A (черт. 268).

Можно вообразить себѣ плоскость, которая проходитъ черезъ прямую АС и вращается около этой прямой. Вращаясь около прямой АС, эта плоскость встрѣтитъ на своемъ пути какую нибудь точку В прямой АВ и тогда плоскость будетъ проходить одновременно черезъ обѣ прямыя АВ и АС.

Подобнымъ же образомъ можно вообразить себѣ другую плоскость, проведенную черезъ прямую АВ и которая, вращаясь около этой прямой, встрѣтитъ прямую АС; тогда и вторая плоскость будетъ проходить черезъ тѣ же прямыя АВ и АС, какъ и первая плоскость. Но можно доказать, что эти плоскости сливаются и, такимъ образомъ, составляютъ одну плоскость.

794. ***Теорема. Черезъ двѣ пересѣкающіяся прямыя можетъ быть проведена только одна плоскость.***

269.

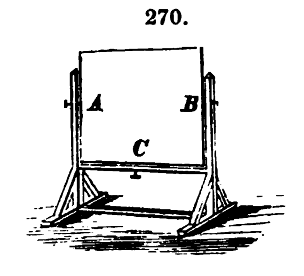
Пусть черезъ двѣ данныя прямыя ОА и ОВ (черт. 269) проведена плоскость. Докажемъ, что вторая плоскость, проведенная черезъ эти же прямыя, сливается съ первой.

Возьмемъ на второй плоскости какую нибудь точку С и черезъ эту точку проведемъ по этой плоскости прямую СА такъ, чтобы она пересѣкла прямыя ОА и ОВ. Пусть точки пересѣченія будутъ А и В. Эти точки вмѣстѣ съ прямыми ОА и ОВ находятся и въ первой плоскости, а потому вся прямая АС, проходящая черезъ эти же точки, а съ нею и точка С, лежатъ въ первой плоскости. Итакъ, точка С, *произвольно взятая* на второй плоскости, лежитъ и въ первой, а это значитъ, что плоскости сливаются одна съ другой. Слѣдовательно, черезъ двѣ пересѣкающіяся прямыя нельзя провести двухъ различныхъ плоскостей.

795. ***Слѣдствіе 1. Положеніе плоскости въ пространствѣ вполнѣ опредѣлено, когда опредѣлено положеніе двухъ пересѣкающихся прямыхъ, черезъ которыя плоскость проходитъ.***

796. ***Слѣдствіе 2. Положеніе плоскости въ пространствѣ опредѣляется также положеніемъ трехъ ея точекъ, не лежащихъ на одной прямой,*** **потому что положеніе двухъ пересѣкающихся прямыхъ опредѣляется тремя точками: точкой ихъ пересѣченія и еще двумя другими точками на этихъ прямыхъ.**

270.

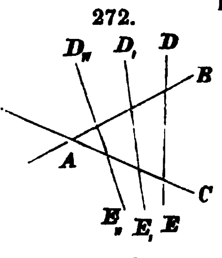


Это же предложеніе можно выразить въ такой формѣ: плоскость будетъ утверждена, если будутъ утверждены три ея точки, лежащія не по прямой линіи. Напр., доска (черт. 270) можетъ вращаться около точекъ А и В, которыя укрѣплены, но она станетъ неподвижно, если еще укрѣпить точку С.

797. *Слѣдствіе* 3. *Положеніе плоскости въ пространствѣ вполнѣ опредѣлено, если опредѣлено положеніе двухъ параллельныхъ линій,* потому что положеніе параллельныхъ прямыхъ опредѣляютъ три точки: двѣ на одной изъ прямыхъ и третья на другой.

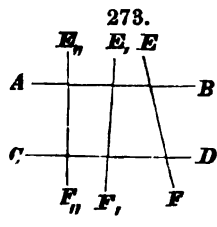
271.

798. Даны въ пространствѣ прямая AB (черт. 271) и внѣ ея точка C; пусть другая прямая CD, укрѣпленная въ точкѣ C, вращаясь около этой точки, скользитъ по данной прямой AB. Тогда CD будетъ описывать (производить) ту плоскость, которой положеніе опредѣляется прямой AB и точкой C.



272.

Точно такъ же прямая DE (черт. 272), которая скользитъ по двумъ пересѣкающимся прямымъ AB и AC, описываетъ (производитъ) плоскость, опредѣляемую этими двумя линіями.



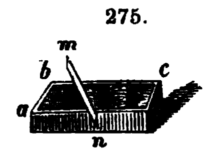
273.

Такимъ же образомъ, и прямая EF (черт. 273), которая скользитъ по параллельнымъ прямымъ AB и CD, описываетъ (производитъ) плоскость, опредѣляемую этими параллельными.

799. Этими способами образованія плоскости пользуются въ разныхъ производствахъ. Если, напр., нужно отпилить кусокъ дерева такъ, чтобы въ разрѣзѣ получилась плоскость, нужно отмѣтить двѣ прямыя AB и AC (черт. 274) на двухъ граняхъ куска отъ одной точки A и, затѣмъ, пилить, наблюдая, чтобы пила не сходила съ означенныхъ линій. Такъ какъ остріе пилы движется по двумъ пересѣкающимся прямымъ, то разрѣзъ будетъ плоскій.

274.

При дѣланіи кирпичей набиваютъ массой деревянную форму и, затѣмъ, сдвигаютъ излишній матеріалъ линейкой *nm* (черт. 275), заставляя ее скользить сначала по двумъ пересѣкающимся прямымъ (*ab* и *ad*), потомъ по параллельнымъ (*ad* и *bc*) и опять по пересѣкающимся (*dc* и *bc*).



275.

Каменьщики для полученія плоской поверхности выдалбливаютъ рѣзцомъ все, что переходитъ плоскость двухъ прямыхъ, которыя предварительно проведены, и повѣряютъ свою работу, прикладывая къ этимъ прямымъ линейку.

800. *Теорема. Двѣ плоскости пересѣкаются по прямой линіи.* Если бы на пересѣченіи двухъ плоскостей можно было найти хотя бы

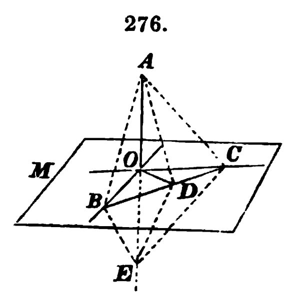
три точки, не лежащія на одной прямой, то вышло бы, что черезъ эти три точки проходили бы двѣ разныя плоскости, что невозможно (§ 796). Стало быть, всѣ точки пересѣченія плоскостей лежатъ на прямой линіи; или линія пересѣченія плоскостей есть линія прямая.

801. На этомъ основывается приготовленіе линейки: строгаютъ сначала широкую сторону дощечки и, когда придадутъ ей плоскую форму, то строгаютъ узкій ея край. Пересѣченіе полученныхъ, такимъ образомъ, двухъ плоскостей даетъ прямую линію.

802. Пусть въ пространствѣ дана прямая линія. Черезъ эту прямую, какъ было сказано (§ 791), можетъ пройти сколько угодно плоскостей. Если теперь возьмемъ на данной прямой точку, то въ каждой изъ плоскостей можно будетъ возставить перпендикуляръ къ прямой изъ этой точки. Такимъ образомъ, въ пространствѣ можетъ быть возставлено сколько угодно перпендикуляровъ къ одной прямой линіи изъ одной на ней точки, или обратно: одна прямая можетъ быть перпендикулярна ко многимъ прямымъ.

803. *Теорема. Если прямая перпендикулярна къ двумъ прямымъ, лежащимъ въ нѣкоторой плоскости, то она перпендикулярна и ко всѣмъ прямымъ, проведеннымъ чрезъ ея основаніе по той же плоскости.*

276.



Пусть прямая OA (черт. 276) перпендикулярна къ OB и OC и черезъ эти прямыя OB и OC проведена плоскость M. Докажемъ, что OA перпендикулярна и ко всякой другой линіи OD, проведенной черезъ основаніе O по плоскости M.

Продолжимъ прямую OA по другую сторону плоскости M и отложимъ на продолженіи часть OE, равную OA. Проведя, затѣмъ, одну плоскость черезъ прямыя AE и OB, а другую черезъ AE и OC, соединимъ точки A и E съ какими нибудь точками B и C на прямыхъ OB и OC. Если проведемъ теперь прямую BC, получимъ треугольники ABC и BCE. У нихъ стороны BA и BE равны, какъ наклонныя, равноудаленныя отъ основанія перпендикуляра (§ 291 по условію OB ⊥ AE, а по построенію OA = OE). По той же причинѣ равны и стороны CA и CE (OC ⊥ AE и OA = OE); сторона BC — общая. Стало быть, △ABC = △BCE. Изъ равенства этихъ треугольниковъ слѣдуетъ, что ∠ACB = ∠ECB.

Соединимъ точку пересѣченія прямыхъ BC и OD съ точками A и E прямыми DA и DE; получимъ треугольники ADC и CDE. Въ этихъ треугольникахъ CA=CE, ∠ACB=∠ECB и сторона CD

общая. Значитъ, $\triangle ADC = \triangle CDE$. Изъ равенства этихъ треугольниковъ слѣдуетъ, что $AD = DE$.

Разсмотримъ теперь треугольники AOD и DOE. Въ нихъ $OA = OE$, $AD = DE$ и OD общая сторона. Поэтому $\triangle AOD = \triangle DOE$.

Изъ равенства этихъ треугольниковъ находимъ, что

$$\angle AOD = \angle DOE,$$

а такъ какъ это углы смежные, то $OD \perp AE$ или $OA \perp OD$, что и требовалось доказать.

804. *Прямая, перпендикулярная ко всѣмъ прямымъ, проведеннымъ на плоскости черезъ ея основаніе, называется перпендикуляромъ къ плоскости* и плоскость въ этомъ случаѣ называется *перпендикулярной* къ прямой.

805. Изъ предъидущей теоремы слѣдуетъ, что прямая перпендикулярна къ плоскости, если она перпендикулярна къ двумъ прямымъ, лежащимъ на этой плоскости.

---

806. Для проведенія перпендикуляровъ къ плоскости употребляется двойной наугольникъ (черт. 277); онъ состоитъ изъ двухъ простыхъ наугольниковъ ABC и ABD, скрѣпленныхъ между собой. Если этотъ приборъ поставить линейками BD и BC на плоскость, то ребро BA будетъ перпендикулярно къ плоскости, потому что оно будетъ перпендикулярно къ двумъ прямымъ BD и BC, проведеннымъ на плоскости.

277.

Обратно: если наугольникъ приложить ребромъ BA къ какой нибудь прямой линіи, то линейки BD и BC укажутъ положеніи плоскости, перпендикулярной къ данной прямой.

807. Плоскость, проходящая черезъ отвѣсную линію (§ 122), называется *вертикальною* плоскостью.

808. Плоскость, перпендикулярная къ отвѣсной линіи, называется *горизонтальною* плоскостью.

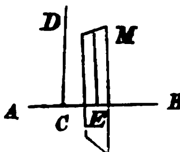
Всѣ прямыя, проведенныя на горизонтальной плоскости, горизонтальны.

Горизонтальныя плоскости часто встрѣчаются во многихъ предметахъ и потому весьма важно умѣть приводить плоскость въ горизонтальное положеніе. Достигается это, какъ мы уже знаемъ, при помощи уровня (ватерпаса). Чтобы убѣдиться въ томъ, что плоскость горизонтальна, достаточно убѣдиться въ горизонтальности *двухъ пересѣкающихся прямыхъ*, лежащихъ на этой плоскости (§ 803).

---

809. *Теорема. Если прямая и плоскость перпендикулярны къ одной прямой линіи, то эти прямая и плоскость не встрѣтятся, сколько бы ихъ ни продолжить.*

Пусть прямая CD (черт. 278) и плоскость M перпендикулярны къ прямой AB. Если предположить, что прямая CD и плоскость M встрѣтятся въ какой нибудь точкѣ F, то, проведя по плоскости M прямую FE, мы будемъ имѣть два перпендикуляра, опущенныхъ изъ точки F на прямую AB; что невозможно. Значитъ, прямая CD не встрѣчаетъ плоскости M.



278.

810. *Прямая и плоскость, которыя не встрѣчаются, сколько бы ихъ ни продолжить, называются параллельными одна къ другой.*

811. *Теорема. Если двѣ плоскости перпендикулярны къ одной прямой линіи, то онѣ не встрѣтятся, сколько бы ихъ ни продолжить.*

Пусть плоскости M и N (черт. 279) перпендикулярны къ прямой AB. Если предположить, что онѣ встрѣтятся въ точкѣ E, то, проведя по плоскостямъ прямыя EC и ED, получимъ два перпендикуляра, опущенныхъ изъ одной точки E къ прямой AB, что невозможно. Значитъ, плоскости не встрѣтятся.

279.

812. *Двѣ плоскости, которыя не встрѣчаются, сколько бы ихъ ни продолжить, называются параллельными одна къ другой.*

813. *Теорема. Двѣ параллельныя плоскости пересѣкаются третьей по линіямъ параллельнымъ.*

280.

Пусть параллельныя плоскости M и N (черт. 280) пересѣчены третьей P. Если предположить, что прямыя AB и CD встрѣтятся, то должны встрѣтиться и плоскости M и N, которыя по условію параллельны. Значитъ, прямыя AB и CD не встрѣчаются и, какъ лежащія въ одной плоскости P, параллельны.

281.

814. *Теорема. Части параллельныхъ линій, заключенныя между параллельными плоскостями, равны между собой.*

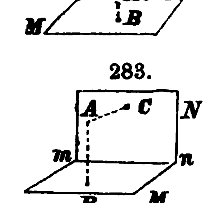
Между параллельными плоскостями M и N (ч. 281) заключены параллельныя прямыя AB и CD. Если черезъ эти параллельныя прямыя провести плоскость, то она пересѣчетъ данныя плоскости по линіямъ AC

и BD, которыя параллельны (§ 813), а потому ABDC есть параллелограммъ и AB равна CD.

---

815. Пусть дана плоскость M (черт. 282) и внѣ ея точка A; гдѣ изъ точки A опущенъ перпендикуляръ на плоскость, то основаніе этого перпендикуляра B называется *проекціей* точки A.

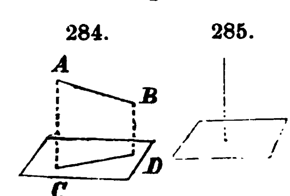
282.



Если мы будемъ имѣть двѣ плоскости M и N (черт. 283), изъ которыхъ M горизонтальная, а N вертикальная, то можемъ получить двѣ проекціи точки A: опустивъ перпендикуляры изъ точки A на плоскости M и N, будемъ имѣть точку B — *горизонтальную проекцію* и точку C — *вертикальную проекцію* точки A. Линія пересѣченія плоскостей проекцій *mn* называется *осью* проекцій.

Чтобы *проектировать* на плоскость ограниченную прямую линію напр. AB (черт. 284), надо опустить изъ ея концовъ перпендикуляры на плоскость и соединить основанія этихъ перпендикуляровъ; полученная такимъ образомъ прямая CD и будетъ проекція данной прямой.

284. 285.

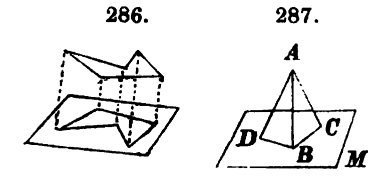


Проекція прямой наклонной къ плоскости проекцій короче самой прямой. Горизонтальная проекція отвѣсной прямой есть точка (черт. 285).

Чтобы проектировать на плоскость многоугольникъ, надо только найти проекціи каждой изъ его сторонъ (черт. 286).

---

286. 287.



Упражненія. 816. Доказать: если AB перпендикулярна къ плоскости M (черт. 287) и BC = BD, то и AC = AD.

817. Указать отвѣсныя и горизонтальныя линіи и плоскости, встрѣчающіяся въ какомъ нибудь строеніи.

818. Какъ установить плоскую доску отвѣсно? Какъ провѣрить — отвѣсно ли поставленъ заборъ?

819. Сколько можно провести вертикальныхъ плоскостей черезъ одну точку? — черезъ одну отвѣсную линію?

820. Можно ли провести вертикальную плоскость черезъ горизонтальную прямую? Если можно, то какъ?

821. Показать, что можно провести вертикальную плоскость черезъ прямую наклонную къ горизонтальной плоскости.

822. На вертикальной плоскости можно ли проводить прямыя горизонтальныя, наклонныя и отвѣсныя?

823. На горизонтальной плоскости можно ли проводить прямыя отвѣсныя, наклонныя?

824. Сколько можно провести горизонтальныхъ плоскостей черезъ одну точку?

825. Къ плоской доскѣ, перпендикулярно къ ней, придѣланъ наглухо колъ. Если этотъ колъ привести въ вертикальное положеніе, то какое положеніе приметъ доска? Какое положеніе приметъ доска, если колъ привести въ горизонтальное положеніе?

826. Если одной сторонѣ наугольника придать отвѣсное положеніе и вращать ее въ томъ же положеніи, то что будетъ описывать другая сторона наугольника?

827. Если ось колеса будетъ имѣть горизонтальное положеніе, то въ какой плоскости будетъ вращаться колесо?

828. Обыкновенный токарный станокъ устроенъ такимъ образомъ, что тѣло, которое на немъ обработывается, быстро вращается около горизонтальной оси. Если утвердить неподвижно рѣзецъ достаточно близко къ вращающемуся тѣлу, то онъ станетъ обрѣзывать всѣ выдающіяся части тѣла и произведетъ такимъ образомъ кругъ. Почему?

Если теперь станемъ приближать рѣзецъ по направленію перпендикулярному къ оси, то какая поверхность будетъ получаться въ мѣстѣ срѣза тѣла?

829. Какъ установить прямую линію параллельно какой нибудь плоскости?

830. Какъ установить плоскость параллельно данной плоскости?

831. Какое относительное положеніе имѣютъ плоскія стороны мельничныхъ жернововъ, если они перпендикулярны къ оси? Какъ должны быть насажены на ось жернова, чтобы при вращеніи они не задѣвали одинъ другаго, хотя бы разстояніе между ними было весьма мало?

832. Какъ намѣтить линіи, по которымъ надо отпилить кусокъ дерева, чтобы плоскость разрѣза была перпендикулярна къ какому нибудь ребру этого куска?

833. Дана прямая опредѣленной длины. Какова будетъ горизонтальная проекція этой прямой, если ей придать отвѣсное положеніе?... горизонтальное положеніе?... наклонное положеніе?

834. Какова будетъ вертикальная проекція отвѣсной прямой?

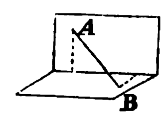
835. Каковы будутъ горизонтальная и вертикальная проекціи квадрата, даннаго въ плоскости, параллельной вертикальной плоскости проекцій? (Стороны этого квадрата могутъ быть въ разныхъ положеніяхъ относительно горизонтальной плоскости проекцій).

836. Каковы будутъ горизонтальная и вертикальная проекціи квадрата, двѣ стороны котораго параллельны горизонтальной плоскости, а другія двѣ параллельны вертикальной плоскости проекцій?

837. Каковы проекціи круга, даннаго въ плоскости параллельной вертикальной плоскости проекцій?

838. Построить проекціи прямой, пересѣкающей плоскости проекцій въ данныхъ двухъ точкахъ А и В (черт. 288).

288.



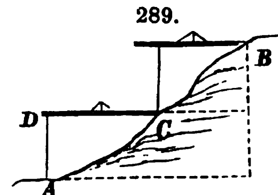
839. Каковы проекціи многоугольника, даннаго въ плоскости, параллельной горизонтальной плоскости проекцій?

XVII.

Нивеллированіе.

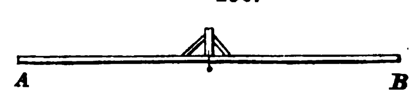
840. Часто требуется узнать, на сколько одно мѣсто земной поверхности выше другаго. Это узнаютъ посредствомъ *нивеллированія*. На небольшихъ пространствахъ нивеллированіе дѣлается такъ: пусть надо узнать, на сколько футовъ точка В (черт. 289) выше А. Берутъ доску DC, однимъ концомъ C кладутъ ее на землю, а другой подпираютъ коломъ AD такъ, чтобы доска была горизонтальна, что провѣряютъ ватерпасомъ. Положимъ, колъ AD 4 фута; значитъ, точка C выше A на 4 фута, потому что C лежитъ на горизонтальной линіи DC, а точка A на 4 фута ниже ея. Затѣмъ, ставятъ колъ въ C, а доску DC однимъ концомъ кладутъ на B и опять приводятъ въ горизонтальное положеніе, вбивая мало-по-малу колъ въ точкѣ C. Если длина кола надъ землей въ этомъ мѣстѣ будетъ $4^1/_2$ фута, то найдемъ, что точка B выше A на $4^1/_2+4$, на $8^1/_2$ футовъ.

289.



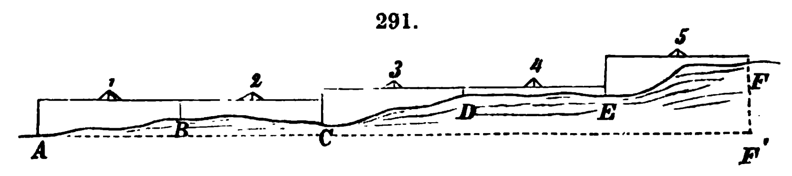
Доску и ватерпасъ часто замѣняютъ однимъ приборомъ, большимъ ватерпасомъ (черт. 290), нижняя доска котораго AB въ 2 или 3 сажени длины.

290.



Положимъ, нивеллированіе начинаютъ отъ точки A (черт. 291).

291.



Въ этой точкѣ вбиваютъ опредѣленной длины колъ (хотя бы въ 4 фута); положивъ ватерпасъ однимъ концомъ на этотъ колъ и приведя его въ горизонтальное положеніе, у другаго конца въ точкѣ B вбиваютъ другой колъ до тѣхъ поръ, пока доска ватерпаса, опираясь концами на оба кола, не будетъ горизонтальна. Затѣмъ, переносятъ ватерпасъ

далѣе, кладутъ одинъ конецъ на колъ B и у другаго конца вбиваютъ слѣдующій колъ C на столько, чтобы доска ватерпаса, положенная на колья B и C, была горизонтальна и т. д. Для бо́льшей точности положеніе ватерпаса слѣдуетъ мѣнять при каждомъ перенесеніи такъ, чтобы задній конецъ заносился впередъ, т. е. конецъ B остается на мѣстѣ, а A переходитъ въ C.

Можетъ случиться, что колъ недостаточно высокъ для того, чтобы привести доску въ горизонтальное положеніе, т. е., когда одинъ конецъ доски будетъ положенъ на колъ, другой будетъ лежать на землѣ и потому не можетъ быть опущенъ болѣе, если это понадобится (напр., между E и F или C и D). Въ этомъ случаѣ рядомъ съ коломъ C, высота котораго недостаточна, вбиваютъ другой колъ бо́льшій и нивеллированіе производятъ попрежнему.

Одновременно съ описаннымъ дѣйствіемъ ведется таблица, въ которой обозначаютъ число нивеллировокъ, а противъ каждаго числа пишутъ, какъ высоту кола задняго (отъ котораго нивеллированіе направляется), такъ и высоту передняго.

Вотъ примѣрно такая таблица:

№	Задній колъ	Передній колъ	
1	4 ф.	2 ф. 1 д.	AB
2	2 ф. 1 д.	3 ф. 2 д.	BC
3	5 ф. —	1 ф. 4 д.	CD
4	1 ф. 4 д.	1 ф. —	DE
5	4 ф. —	— 10 д.	EF
Сумма	16 ф. 5 д.	8 ф. 5 д.	

Изъ этой таблицы можно опредѣлить во-первыхъ разность высотъ точекъ первой (A) и послѣдней (F) и во-вторыхъ разстояніе между этими точками по горизонтальной линіи, если нивеллированіе производилось по прямому направленію.

1) Для опредѣленія разности высотъ надо найти суммы величинъ заднихъ и переднихъ кольевъ и одну изъ другой вычесть, полученная разность и будетъ искомая разность высотъ.

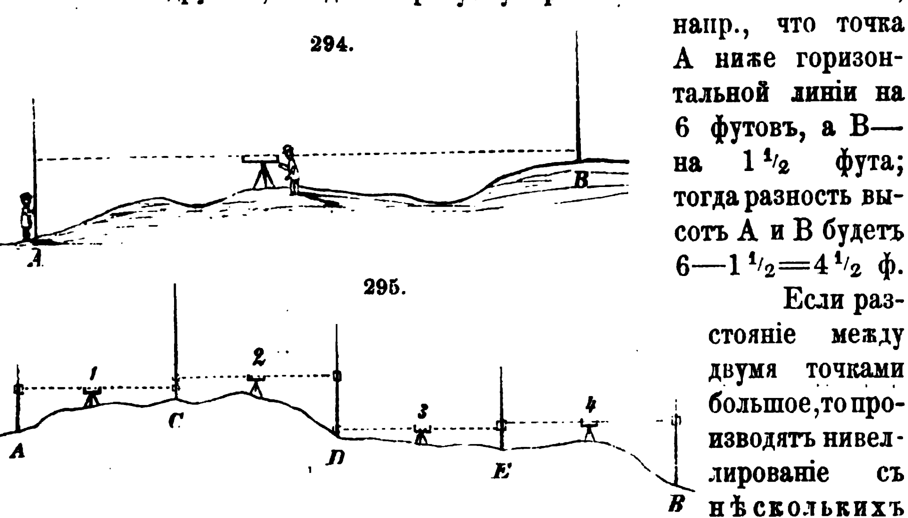
2) Чтобы опредѣлить разстояніе между конечными точками (A и F) по горизонтальному направленію (AF′), нужно только длину нижней доски ватерпаса умножить на число нивеллировокъ.

841. **Нивеллировку производятъ также при помощи** ***нивеллира*** (§ 126); но при этомъ употребляется еще приборъ, называемый ***рейкой***. **Рейки** бываютъ ***простыя*** и ***сложныя***.

292. 293.

Простая рейка (черт. 292) есть деревянный брусокъ въ $10^1/_2$ футовъ длины съ дѣленіями на футы и на дюймы или на десятыя части фута. Часто вдоль рейки дѣлаютъ пазы, по которымъ движется вверхъ и внизъ дощечка; половина ея окрашена въ черную краску, а другая—въ бѣлую; въ серединѣ дощечки прорѣзъ, черезъ который можно видѣть дѣленія рейки. Сложная рейка (черт. 293) состоитъ изъ двухъ брусковъ A и B, устроенныхъ такъ, что одинъ изъ нихъ можетъ выдвигаться изъ другаго; наверху выдвижнаго бруска находится дощечка C, окрашенная черной и бѣлой красками.

Положимъ, надо найти разность высотъ A и B (черт. 294). Поставивъ нивеллиръ между этими точками, пошлемъ рейку въ точку A и посмотримъ, какое дѣленіе рейки приходится наравнѣ съ поверхностью жидкости въ обоихъ колѣнахъ нивеллира. Затѣмъ, отправивъ рейку въ точку B, замѣтимъ опять, какое дѣленіе рейки встрѣчаетъ та же горизонтальная линія, которая проходитъ черезъ оба колѣна нивеллира. Вычтя, наконецъ, одно показаніе рейки изъ другаго, найдемъ требуемую разность высотъ. Положимъ, напр., что точка A ниже горизонтальной линіи на 6 футовъ, а B—на $1^1/_2$ фута; тогда разность высотъ A и B будетъ $6-1^1/_2=4^1/_2$ ф.



Если разстояніе между двумя точками большое, то производятъ нивеллированіе съ нѣсколькихъ мѣстъ или станцій (сложное нивеллированіе). Найдемъ разность высотъ A и B (черт. 295). Помѣстивъ нивеллиръ въ точку 1, визи-

руемъ рейку A и записываемъ ея показаніе; перенеся рейку въ C, дѣлаемъ то же самое. Затѣмъ, переносимъ нивеллиръ изъ 1 въ 2, визируемъ рейку, оставшуюся въ C, записываемъ и отсылаемъ рейку въ D и т. д. Такимъ образомъ, мы получимъ слѣдующую таблицу:

Станціи	Визированіе назадъ	Визированіе впередъ
1	7 ф.	3 ф.
2	5 ф.	9 ф. 6 д.
3	1 ф.	4 ф.
4	5 ф.	11 ф.
	18 ф.	27 ф. 6 д.

Сложимъ числа, полученныя отъ визированія назадъ, въ одну сумму, а числа, полученныя отъ визированія впередъ, въ другую сумму, вычтемъ одну сумму изъ другой, получимъ искомую разность высотъ: 27 ф. 6 д.—18 ф.=9 ф. 6 д.

Для нивеллированія на большихъ разстояніяхъ употребляютъ нивеллиръ съ зрительной трубой и уровнемъ. При помощи уровня труба можетъ быть приведена въ горизонтальное положеніе.

Можно производить нивеллированіе, не помѣщая нивеллира на прямой линіи съ рейками, а внѣ этой прямой. При этомъ только нужно будетъ поворачивать нивеллиръ въ горизонтальной плоскости.

---

842. Нивеллированіе даетъ возможность опредѣлить разстояніе между точками, взятыми на поверхности земли по *горизонтальному направленію*. При составленіи болѣе точныхъ плановъ мѣстности наносятся на планъ именно эти разстоянія, называемыя *горизонтальными проложеніями* (проекціями) линій мѣстности.

Такимъ образомъ, *планъ есть обозначеніе на бумагѣ горизонтальныхъ проложеній* (проекцій) *предметовъ мѣстности въ опредѣленномъ масштабѣ.*

Горизонтальное проложеніе линіи, взятой на мѣстности, можно, какъ было показано (§ 840), опредѣлить при помощи ватерпаса. Оно можетъ быть также опредѣлено по длинѣ линіи, проведенной по землѣ, и числу градусовъ въ углѣ, составляемомъ въ вертикальной плоскости этой линіей съ горизонтальной. Число градусовъ

этого угла узнается съ помощью высотомѣра (§ 767). Зная длину линіи на землѣ и число градусовъ угла возвышенія, для опредѣленія горизонтальнаго проложенія можно во-первыхъ воспользоваться масштабомъ высотъ (§ 770), а во-вторыхъ таблицей поправокъ, въ которой указывается, на сколько нужно уменьшить длину измѣренной на землѣ линіи, такъ какъ горизонтальная проекція наклонной прямой короче самой прямой. Вотъ эта таблица:

Углы наклоненія	3°	5°	7°	10°	15°	20°	23°	25°	30°	32°	35°	40°	45°
Поправка для 10 саж.	0,01	0,04	0,08	0,15	0,34	0,60	0,80	0,94	1,34	1,52	1,81	2,34	2,93

Съ помощью этой таблицы вычисляютъ такимъ образомъ: положимъ, длина линіи 75 саж., а наклонъ 15°. Для 10 саженъ надо уменьшить длину (при 15°) на 0,34 саж.,

для 1 саж. — 0,034 саж.,

а для 75 саж. — на 0,034 саж. $\times$ 75

или — на 2,55 саж.

Слѣдовательно, проложеніе равняется

75 саж. — 2, 55 саж. = 72,45 саж.

Упражненія. 843. Какъ можно убѣдиться въ вѣрности ватерпаса?

844. Какъ можно опредѣлить высоту какого нибудь мѣста надъ поверхностью моря или озера?

845. Какъ розыскать на мѣстности наиболѣе ровный горизонтальный путь для проведенія дороги?

846. Какъ можно опредѣлить разстояніе между двумя предметами по горизонтальному направленію?

847. Въ § 840 показано, какъ производится вычисленіе разности высотъ при нивеллированіи. Нельзя ли произвести это вычисленіе другимъ способомъ?

848. Опредѣлить горизонтальное проложеніе прямой въ 34 саж. длины и образующей съ горизонтальной уголъ въ 10°.

849. Дорога образуетъ скатъ длиною въ 56 саж., крутость ската 20°. Вычислить горизонтальное проложеніе дороги.

XVIII.

Описаніе простѣйшихъ геометрическихъ тѣлъ; правила измѣренія ихъ поверхностей и объемовъ.

Многогранникъ.

850. *Многогранникомъ* называется геометрическое тѣло, ограниченное со всѣхъ сторонъ плоскостями. Эти плоскости, составляющія поверхность многогранника, называются *гранями;* прямыя линіи, въ которыхъ встрѣчаются грани, называются *ребрами.*

Часть пространства, занятая многогранникомъ, называется его объемомъ.

Призма.

851. *Призма* есть многогранникъ (черт. 296) съ двумя параллельными гранями (ABCDE и FGKLM), остальныя (боковыя) грани котораго пересѣкаются по параллельнымъ линіямъ (AF || BG || CK и т. д.).

296.

M F L G K E A N D B C

Параллельныя и равныя грани призмы ABCDE и FGKLM называются ея *основаніями.*

Прямая FN, проведенная отъ какой нибудь точки одного основанія перпендикулярно къ другому, называется *высотою* призмы.

По числу боковыхъ граней, призмы называются *трехгранными, четырехгранными* и т. д.

Если боковыя ребра призмы перпендикулярны къ ея основанію (ч. 297), призма называется *прямою,* въ противномъ случаѣ *наклонною.* Призма называется *правильною,* если ея основаніе есть правильный многоугольникъ.

297.

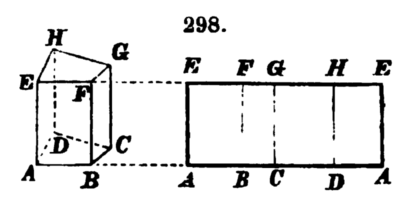
852. Четырехгранная призма, въ основаніяхъ которой параллелограммы, называется *параллелепипедомъ.* Прямой параллелепипедъ, имѣющій въ основаніяхъ прямоугольники, называется *прямоугольнымъ.*

Къ прямоугольнымъ параллелепипедамъ можно отнести *кубъ. Кубомъ называется правильный многогранникъ, ограниченный со всѣхъ сторонъ шестью равными квадратами.*

---

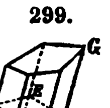
853. Измѣрить поверхность многогранника значитъ найти сумму площадей всѣхъ его граней.

Боковая поверхность всякой призмы можетъ быть развернута на плоскости. Если боковую поверхность прямой призмы развернуть на плоскости, то получится прямоугольникъ (ч. 298), основаніе котораго равно периметру основанія призмы, а высота—высотѣ призмы.



298.

Боковая поверхность прямой призмы равна произведенію периметра основанія на высоту призмы.



299.

Боковая поверхность наклонной призмы равна периметру перпендикулярнаго къ боковому ребру сѣченія ABCDE, умноженному на боковое ребро FG (ч. 299).

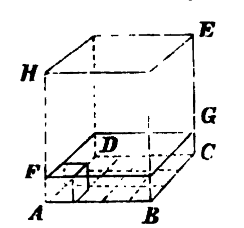
---

854. *Измѣрить объемъ тѣла значитъ узнать, сколько въ данномъ объемѣ содержится другихъ объемовъ, принятыхъ за единицу.*

За единицу объема принимается всегда объемъ куба, ребра котораго равны какой нибудь линейной единицѣ. Такая единица объема называется кубической единицей, напр., кубическимъ футомъ, кубич. вершкомъ и проч.

855. Положимъ, надо измѣрить объемъ прямоугольнаго параллелепипеда AE (ч. 300), котораго основаніе—ADCB, а высота AH. Пусть одна сторона основанія этого параллелепипеда AB равна


4 дюйм., а другая — BC = 3 дюйм., высота AH = 5 дюйм.



300.

Умноживъ 4 на 3, получимъ площадь основанія этого параллелепипеда — 12 кв. д. Если на каждый изъ квадратныхъ дюймовъ поставить по одному кубическому дюйму *n*, то найдемъ, что въ одномъ слоѣ ABCDFG содержится 12 кубич. дюймовъ. Чтобы узнать, сколько кубическихъ дюймовъ содержится въ данномъ параллелепипедѣ AE, нужно число кубич. дюймовъ въ одномъ слоѣ умножить на число слоевъ; а такъ какъ всѣхъ слоевъ въ данномъ тѣлѣ будетъ 5, то 12 кубич. дюймовъ надо умножить на 5. Слѣдовательно, объемъ даннаго параллелепипеда равенъ 12 куб. д. $\times$ 5 = 60 куб. д.

Чтобы измѣрить объемъ прямоугольнаго параллелепипеда, надо площадь основанія умножить на высоту.

Также измѣряется и объемъ всякаго параллелепипеда и всякой призмы.

Объемъ всякой призмы равенъ произведенію площади основанія на высоту.

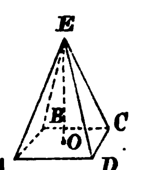
856. Такъ какъ для измѣренія объема даннаго параллелепипеда (ч. 300) пришлось перемножить три числа ($4 \times 3 \times 5$), обозначающія всѣ три его измѣренія (длину, ширину и высоту), то можно сказать, что объемъ параллелепипеда равенъ произведенію всѣхъ трехъ его измѣреній.

Всѣ три измѣренія куба одинаковы, а потому для измѣренія его объема достаточно измѣрить только одно его ребро и полученное число умножить на то же число два раза, или, какъ говорятъ, *взять въ кубъ*. Напр., объемъ куба, ребро котораго равно 4 дюйм., равенъ $4 \times 4 \times 4 = 4^3 = 64$ куб. дюйм. Подобнымъ же образомъ можно вычислить, сколько кубическихъ дюймовъ въ одномъ кубическомъ футѣ: ребро кубическаго фута равно 12 дюймамъ, а потому объемъ кубическ. фута равенъ $12^3 = 1728$ куб. дюймовъ.

Пирамида.

857. *Пирамида* есть многогранникъ (черт. 301), ограниченный какимъ нибудь многоугольникомъ (ABCD) и треугольниками, которые сходятся вершинами въ одной точкѣ (E).

301.



Многоугольникъ ABCD называется *основаніемъ* пирамиды, точка E —*вершиной,* а перпендикуляръ (EO), опущенный изъ вершины на плоскость основанія,— *высотой.*

По числу боковыхъ граней пирамиды называются *трехгранными, четырехгранными и т. д.*

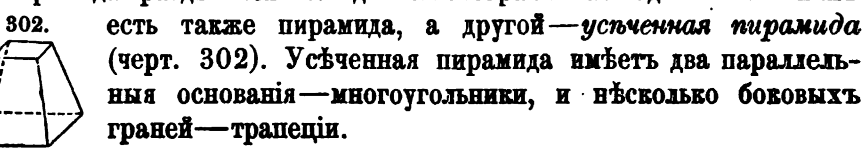
Пирамида называется *правильною,* если основаніе ея правильный многоугольникъ и высота проходитъ черезъ центръ основанія.

Боковыя грани правильной пирамиды суть равнобедренные и равные треугольники.

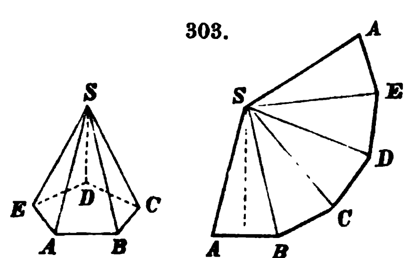
Высота этихъ треугольниковъ называется *апоѳемой* пирамиды.

Если пирамиду пересѣчь плоскостью, параллельною основанію, то пирамида раздѣлится на два многогранника: одинъ изъ нихъ есть также пирамида, а другой—*усѣченная пирамида* (черт. 302). Усѣченная пирамида имѣетъ два параллельныя основанія—многоугольники, и нѣсколько боковыхъ граней—трапеціи.

302.



858. Боковая поверхность всякой пирамиды можетъ быть развернута на плоскости.



Если боковую поверхность правильной пирамиды развернуть на плоскости, то получится площадь, составленная изъ равнобедренныхъ треугольниковъ, высôты которыхъ равны апоѳемѣ данной пирамиды, а всѣ основанія составляютъ периметръ основанія пирамиды (черт. 303).

Боковая поверхность правильной пирамиды равна половинѣ произведенія периметра основанія на апоѳему пирамиды.

Для полученія поверхности неправильной пирамиды надо вычислить площадь каждой грани отдѣльно и найти сумму площадей.

Боковая поверхность усѣченной правильной пирамиды составляется изъ равныхъ трапецій.

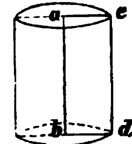
Боковая поверхность усѣченной правильной пирамиды получится, если половину суммы периметровъ основаній (или периметръ средняго сѣченія) умножить на апоѳему пирамиды.

859. Объемъ пирамиды въ три раза меньше объема призмы, имѣющей такое же основаніе и высоту.

Объемъ пирамиды равенъ одной трети произведенія площади основанія на высоту.

Цилиндръ.

860. Если будемъ вращать прямоугольникъ около какой нибудь его стороны, то получимъ тѣло, заключенное между двумя равными параллельными кругами и кривою поверхностью, называемое *цилиндромъ* (черт. 304). *)



Неподвижная сторона ab, около которой вращается прямоугольникъ $abdc$, называется *осью* цилиндра, а сторона cd, образующая своимъ движеніемъ кривую поверхность—*производящею*.

Ось прямаго цилиндра есть также и высота его. Круги, которые образуются движеніемъ сторонъ ac и bd, называются *основаніями* цилиндра.

Цилиндръ можно разсматривать какъ призму, имѣющую безчисленное множество боковыхъ граней.

---

*) Здѣсь разсматриваются только прямые и круговые цилиндръ и конусъ.

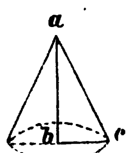
861. Боковая поверхность цилиндра можетъ быть развернута на плоскости.

Боковая поверхность цилиндра равна произведенію окружности основанія на производящую.

862. *Объемъ цилиндра равенъ произведенію площади основанія на высоту.*

Конусъ.

305.



863. Если станемъ вращать прямоугольный треугольникъ около одного изъ катетовъ, то получимъ тѣло. заключенное между кругомъ и кривою поверхностью; тѣло это называется *конусомъ* (черт. 305).

Неподвижная сторона *ab*, около которой вращается треугольникъ *abc*, называется *осью* конуса, а сторона *ac*, образующая своимъ движеніемъ кривую поверхность,—*производящею*. Ось прямаго конуса есть также и *высота* его. Кругъ, который образуется движеніемъ стороны *bc*, называется *основаніемъ* конуса.

Если пересѣчь конусъ плоскостью, параллельною основанію, то конусъ раздѣлится на два тѣла: одно изъ нихъ есть также конусъ, а другое—*усѣченный конусъ*.

Усѣченный конусъ имѣетъ два основанія—круги.

Конусъ можно разсматривать какъ пирамиду, имѣющую безчисленное множество боковыхъ граней.

864. Боковая поверхность конуса можетъ быть развернута на плоскости.

Боковая поверхность конуса равна половинѣ произведенія окружности основанія на производящую.

Боковая поверхность усѣченнаго конуса получится, если половину суммы окружностей основаній умножить на производящую.

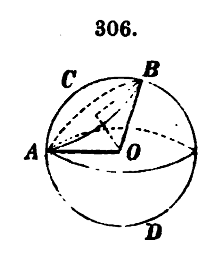
865. *Объемъ конуса равенъ одной трети произведенія площади основанія на высоту.*

Шаръ.

866. Если половину круга вращать около діаметра, то получится тѣло, всѣ точки поверхности котораго равно удалены отъ одной точки—центра; это тѣло называется *шаромъ*.

Прямая, проведенная изъ центра шара къ какой нибудь точкѣ его поверхности, называется *радіусомъ* шара. Прямая, про-

веденная черезъ центръ шара между двумя точками поверхности, называется *діаметромъ* шара.



Если пересѣчь шаръ какой нибудь плоскостью AB (черт. 306), то въ сѣченіи (въ разрѣзѣ) получится кругъ, а шаръ раздѣлится на двѣ части ACB и ADB, называемыя *сферическими сегментами*.

Сѣченіе шара, проходящее черезъ центръ, имѣетъ своимъ радіусомъ радіусъ шара; если же сѣченіе не проходитъ черезъ центръ, то имѣетъ радіусъ меньше радіуса шара.

Всякое сѣченіе шара черезъ центръ называется *большимъ кругомъ шара*.

Всякій большой кругъ шара дѣлитъ его на двѣ равныя части — *полушарія*.

Часть шара AOBC, составленная изъ сегмента и конуса, имѣющаго основаніе общее съ сегментомъ и вершину въ центрѣ, называется *сферическимъ секторомъ*.

Сферическій секторъ можно образовать вращеніемъ круговаго сектора около одной его стороны.

867. Поверхность шара не можетъ быть развернута на плоскости безъ складокъ.

Поверхность шара въ четыре раза больше площади большаго круга.

Если длину радіуса шара выразимъ черезъ R, то площадь большаго круга будетъ равна πR^2, а поверхность шара $4\pi R^2$. Обозначивъ длину діаметра шара черезъ D, получимъ площадь большаго круга — $\frac{\pi D^2}{4}$, а поверхность шара — πD^2.

868. *Объемъ шара равенъ одной трети произведенія его поверхности на радіусъ.*

Если длина радіуса шара обозначена черезъ R, то объемъ выразится черезъ $\frac{4\pi R^2 \times R}{3} = \frac{4\pi R^3}{3}$.

Обозначивъ діаметръ шара черезъ D, найдемъ, что объемъ его равенъ $\frac{\pi D^2 \times \frac{D}{2}}{3} = \frac{\pi D^3}{6}$.

Упражненія. 869. Каковы проекціи куба, стоящаго одной гранью на горизонтальной плоскости?

870. Каковы проекціи прямоугольнаго параллелепипеда съ квадратнымъ основаніемъ, если онъ приложенъ основаніемъ къ вертикальной плоскости проекцій?

871. Каковы проекціи цилиндра и правильной шестигранной призмы, если эти тѣла стоятъ на горизонтальной плоскости?

872. Каковы проекціи боковыхъ граней правильной четырехгранной пирамиды, основаніе которой параллельно горизонтальной плоскости проекцій?

873. Каковы проекціи конуса, основаніе котораго параллельно вертикальной плоскости проекцій?

874. Каковы проекціи шара?

875. Вычислить боковую поверхность правильной восьмигранной призмы, у которой сторона основанія равна 3 д., а высота — 10 д.

876. Вычислить *полную* поверхность прямаго параллелепипеда съ квадратнымъ основаніемъ. Сторона основанія = 5 д., а высота = 15 д.

877. Вычислить объемъ прямаго параллелепипеда съ квадратнымъ основаніемъ. Сторона равна 5 д., а высота — 15 д.

878. Вычислить емкость ящика, длина котораго = 4 ф., ширина = 2 ф. 6 д., а высота = 2 ф.

879. Вычислить полную поверхность и объемъ правильной шестигранной призмы, сторона основанія которой = 4 д., а высота = 10 д. (Апоѳема основанія = $\sqrt{12}$ или 3,46 д. § 672).

880. Вычислить полную поверхность и объемъ правильной трехгранной призмы, у которой сторона основанія = 5 д., а высота = 10 д.

881. Составить таблицу кубическихъ мѣръ (§ 856).

882. Вычислить боковую поверхность правильной пятигранной пирамиды, апоѳема которой — 12 вершк., а сторона основанія = 4 вершк.

883. Вычислить полную поверхность правильной четырехгранной пирамиды, апоѳема которой = 9 д., а сторона основанія = 5 д.

884. Вычислить объемъ пирамиды, площадь основанія которой = 28 кв. д., а высота = 12 д.

885. Вычислить объемъ правильной четырехгранной пирамиды, сторона основанія которой = 6 д. и высота = 6 д.

886. Вычислить полную поверхность и объемъ правильныхъ трехгранной и шестигранной пирамидъ, стороны основанія которыхъ равны 5 д., а высоты = 12 д. (§ 672).

887. Объемъ призмы равенъ 270 куб. вершк., а высота — 10 вершк. Какъ велика площадь основанія этой призмы?

888. Объемъ пирамиды = 300 куб. д., а площадь основанія = 30 кв. д. Опредѣлить высоту.

889. Вычислить боковую поверхность правильной пятигранной усѣченной пирамиды, стороны основаній которой равны 7 и 5 д., а апоѳема 4 д.

890. Вычислить боковую поверхность цилиндра, радіусъ основанія котораго = 5 д., а высота = 15 д.

891. Вычислить полную поверхность цилиндра, высота и діаметръ котораго = 3 д.

892. Вычислить объемъ цилиндра, радіусъ основанія котораго = 5 д., а высота = 15 д.

893. Объемъ цилиндра — 500 куб. д., а высота = 10 д. Найти діаметръ основанія этого цилиндра.

894. Вычислить емкость цилиндрическаго сосуда, внутренній поперечникъ котораго — 7 д., а высота — 5 д.

895. Вычислить боковую и полную поверхность конуса, производящая котораго — 12 ф., а радіусъ основанія — 3 ф.

896. Вычислить объемъ конуса, радіусъ основанія котораго — 3 д., а высота — 8 д.

897. Вычислить поверхность конуса, радіусъ основанія котораго = 4 д., а высота — 9 д. (§ 670).

898. Вычислить поверхность и объемъ шара, радіусъ котораго равенъ 10 д.

899. Вычислить поверхность и объемъ шара, діаметръ котораго равенъ 4 вершк.

900. Имѣемъ цилиндрическій сосудъ, внутренній діаметръ котораго равенъ 4 д. Въ этотъ сосудъ налита до нѣкоторой высоты вода. Вычислить объемъ тѣла, отъ погруженія котораго въ воду послѣдняя поднялась на $1\frac{1}{2}$ д.

901. Ребро одного куба вдвое больше ребра другаго; во сколько разъ поверхность и объемъ перваго изъ нихъ больше поверхности и объема втораго?

902. Найти отношеніе поверхностей и объемовъ шаровъ, радіусы которыхъ равны 10 и 5 д.

903. Діаметръ шара, діаметръ основанія цилиндра и конуса и высота послѣднихъ двухъ тѣлъ равны порознь 10 вершк. Сравнить поверхности и объемы этихъ трехъ тѣлъ.

904. Найти вѣсъ воды, наполняющей цилиндрическій сосудъ, радіусъ основанія котораго = 4 д., высота = 10 д. Кубическій дюймъ воды вѣситъ 0,04 фунта.

905. Опредѣлить вѣсъ стальнаго бруса 12 ф. длины, если ширина и толщина его равны 5 и 3 д. Куб. д. воды вѣситъ 0,04 ф., а удѣльный вѣсъ стали — 7,8.

906. Опредѣлить вѣсъ мѣдной трубки, длина которой — 5 д., наружный діаметръ = 3 д., а внутренній — 2 д. Удѣльный вѣсъ мѣди — 8,75.

907. Изъ мѣди сдѣлано тѣло, имѣющее видъ правильной шестигранной призмы съ цилиндрическимъ отверстіемъ въ серединѣ. Опредѣлить вѣсъ этого тѣла, если высота — 0,75 д., сторона основанія — 1 д., а діаметръ отверстія — 1,2 д. Куб. д. воды вѣситъ 3,84 зол., а удѣльный вѣсъ мѣди — 8,75.

ПРИЛОЖЕНІЕ.

Объ извлеченіи квадратнаго корня.

1. Возвысить число въ степень значитъ взять это число множителемъ нѣсколько разъ. Число, возводимое въ степень, называется *основаніемъ* или *корнемъ* степени, число множителей—*показателемъ* степени, а произведеніе—*степенью*. Напр. $5 \times 5 \times 5 = 125$ или $5^3 = 125$—здѣсь произведеніе (125) есть третья степень пяти; 5 есть корень третьей степени изъ 125, а число множителей—3—показатель степени.

Вторая степень числа называется иначе квадратомъ этого числа; напр., 49 есть квадратъ числа 7, а 7 есть квадратный корень изъ 49.

2. Дѣйствіе, посредствомъ котораго находится корень какой нибудь степени, называется извлеченіемъ корня.

Извлечь квадратный корень изъ даннаго числа значитъ найти такое число, квадратъ котораго равенъ данному. Знакъ дѣйствія—„$\sqrt{}$", а дѣйствіе обозначается такъ: $\sqrt{36} = 6$.

Квадратные корни чиселъ, меньшихъ 100, извѣстны изъ таблицы умноженія; напр., $\sqrt{1} = 1$, $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt{16} = 4$ и т. д.

3. Для извлеченія квадратнаго корня изъ бо̀льшихъ чиселъ, надо прежде разсмотрѣть, какъ составляются квадраты двузначныхъ чиселъ. Для этого составимъ квадратъ числа 63 или $60 + 3$:

$$\begin{array}{r} 60 + 3 \\ \times\ 60 + 3 \\ \hline 180 + 9 \\ 3600 + \ \ 180 \\ \hline 3600 + 2 . 180 + 9 = 3969 \end{array}$$

Разсматривая составъ этого квадрата, видимъ, что квадратъ двузначнаго числа (63^2) составился изъ квадрата десятковъ ($60^2 = 3600$), сложеннаго съ удвоеннымъ произведеніемъ десятковъ на единицы ($2 \times 60 \times 3 = 2 \times 180$) и съ квадратомъ единицъ ($3^2 = 9$). И такъ, *квадратъ двузначнаго числа равенъ квадрату десятковъ + удвоенному произведенію десятковъ на единицы + квадрату единицъ*. Напр.,

$$76^2 = 70^2 + 2 . 70 . 6 + 6^2 = 4900 + 840 + 36 = 5776.$$

Замѣтимъ еще, что квадратъ десятковъ всегда состоитъ изъ цѣлыхъ сотенъ ($70^2 = 4900$), а удвоенное произведеніе десятковъ на единицы состоитъ изъ цѣлыхъ десятковъ ($2 . 70 . 6 = 840$).

4. Извлечемъ квадратный корень изъ числа 1156. Квадратный корень изъ этого числа болѣе 10 и менѣе 100, потому что $10^2=100$, т. е. менѣе даннаго числа (1156), а $100^2=10000$ — болѣе даннаго числа (1156). Стало быть, $\sqrt{1156}$ = двузначному числу,

$$\sqrt{1156}=..$$

а потому 1156 должно быть равно квадрату двузначнаго числа, и слѣдовательно, 1156 заключаетъ въ себѣ квадратъ десятковъ искомаго числа + удвоенное произведеніе десятковъ на единицы + квадратъ единицъ.

Квадратъ десятковъ заключается въ сотняхъ даннаго числа, значитъ, въ 11 сотняхъ, а потому число десятковъ не болѣе 3-хъ. Вычитаю изъ даннаго числа 1156 квадратъ десятковъ (9 сотенъ), получаю остатокъ 256

```
√11|56=3.
  9
 ───
 256
```

Въ этомъ остаткѣ должно заключаться: удвоенное произведеніе десятковъ на единицы + квадратъ единицъ. Удвоенное произведеніе десятковъ на единицы заключается въ десяткахъ, значитъ — въ 25 дес., а потому, удвоивъ найденную цифру десятковъ 3 и, получивъ такимъ образомъ 6, рѣшаю вопросъ: какова можетъ быть цифра единицъ, если произведеніе 6 на эту цифру не должно превышать числа 25? Для рѣшенія этого вопроса дѣлю 25 на 6 и узнаю, что цифра единицъ не болѣе 4-хъ. Найдя, затѣмъ, удвоенное произведеніе десятковъ на единицы ($2.30.4=240$), вычитаю его изъ 256 и получаю остатокъ 16.

```
  √11|56=34
    9
 ─────────
  6 |25,6
    |24
 ─────────
      16
```

Въ этомъ остаткѣ долженъ заключаться квадратъ единицъ, а такъ какъ найденная цифра единицъ — 4, то квадратъ единицъ — 16; этотъ квадратъ какъ разъ и содержится въ полученномъ остаткѣ. Такимъ образомъ, находимъ, что квадратный корень изъ 1156 есть 34. Дѣйствіе же можетъ быть расположено такъ:

```
  √11|56=34
    9
 ─────────
  6 |25,6
    |24
 ─────────
      16
      16
 ─────────
```

Разсуждая по предыдущему, извлечемъ квадратный корень изъ числа 5340.

```
√53|40—73
 49
14|44,0
  |42
    20
     9
    11
```

Въ этомъ случаѣ, какъ видно, получится остатокъ 11.

Механизмъ этого дѣйствія допускаетъ нѣкоторое упрощеніе въ томъ, что можно сразу получить удвоенное произведеніе десятковъ на единицы и квадратъ единицъ, приписавъ къ удвоенному числу десятковъ цифру единицъ и умноживъ полученное число на цифру единицъ.

Такъ, въ разобранномъ примѣрѣ можно къ 6 приписать 4 и 64 умножить на 4. Тогда дѣйствіе будетъ выражено такъ:

```
√11|56—34
  9
64|25,6
 4|25 6
```

Второй примѣръ представится въ такомъ видѣ:

```
 √53|40—73
  49
143|44,0
  3|42 9
     1 1
```

5. Когда при извлеченіи корня получается остатокъ, то изъ даннаго числа вовсе не можетъ быть извлечено *точнаго* корня, потому что нельзя предположить, что этотъ корень можетъ быть выраженъ дробью, такъ какъ никакая дробь, возвышенная въ квадратъ, не можетъ произвести цѣлаго числа.

6. Примѣры для упражненій:

$\sqrt{289}$, $\sqrt{676}$, $\sqrt{841}$, $\sqrt{961}$, $\sqrt{1521}$, $\sqrt{2304}$, $\sqrt{2500}$, $\sqrt{3025}$, $\sqrt{4096}$, $\sqrt{5625}$, $\sqrt{7569}$, $\sqrt{8649}$.

7. Положимъ, нужно извлечь квадратный корень изъ числа 119716. Такъ какъ это число болѣе 100^2 (10000) и менѣе 1000^2 (1000000), то корень его состоитъ изъ сотенъ, десятковъ и единицъ

$$\sqrt{119716} - \ldots$$

Но всякое число, обозначаемое тремя цифрами, можно разсматривать, какъ состоящее изъ десятковъ и единицъ. Напр., 275 состоитъ изъ 27 десятковъ и 5 единицъ. И такъ, 119716 можно разсматривать, какъ квадратъ числа, состоящаго изъ десятковъ и единицъ, а потому оно заключаетъ въ себѣ квадратъ десятковъ искомаго числа + удвоенное произведеніе десятковъ на единицы + квадратъ единицъ. Квадратъ десятковъ заключается въ сотняхъ даннаго числа, значитъ—въ 1197 сотняхъ, а слѣдовательно, чтобы узнать число десятковъ, надо извлечь квадратный корень изъ 1197 сотенъ; извлекая извѣстнымъ уже намъ способомъ,

```
 √11|97|16—34.
   9
 ─────────────
 64 | 29,7
  4 | 25 6
 ─────────────
      4 1
```

находимъ, что число десятковъ равно 34. Присоединяя къ остатку 41 сотня еще 16 единицъ, получаемъ полный остатокъ 4116, въ которомъ должно содержаться удвоенное произведеніе десятковъ на единицы + квадратъ единицъ.

Удвоенное произведеніе десятковъ на единицы содержится въ десяткахъ, значитъ, въ 411 дес., а потому, удвоивъ найденное число десятковъ 34 и получивъ, такимъ образомъ, 68, найдемъ, чрезъ дѣленіе 411 на 68, что цифра единицъ есть 6. Все дѣйствіе расположится такъ:

```
  √11|97|16—346
    9
  ─────────────
  64 | 29,7
   4 | 25 6
  ─────────────
 686 | 4 11,6
   6 | 4 11 6
  ─────────────
```

Объясненный на предыдущемъ примѣрѣ способъ дѣйствія вполнѣ примѣняется и къ большимъ числамъ.

Примѣры:

```
    √3|32|34|00—1823;
     1
    ───────────
  28 | 23,2
   8 | 22 4
    ───────────
   362 | 83,4
     2 | 72 4
    ───────────
  3643 | 11 00,0
     3 | 10 92 9
    ───────────
            7 1
```

```
√21|22|44|49 = 4607;
  16
86  | 52,2
 6  | 51 6
9207 | 64,44,9
   7 | 64 44 9
```

```
√81|14|40|64 = 9008;
  81
18008 | 1,44,06,4
    8 | 1 44 06 4
```

8. **Примѣры для упражненій:**

$\sqrt{15129}$; $\sqrt{60516}$; $\sqrt{140625}$; $\sqrt{166464}$; $\sqrt{531441}$; $\sqrt{654481}$; $\sqrt{879844}$; $\sqrt{1522756}$; $\sqrt{9597604}$; $\sqrt{33269824}$.

9. Если изъ даннаго числа не можетъ быть извлечено точнаго корня (какъ напр. $\sqrt{3}$, $\sqrt{10}$ и проч.), то его находятъ *приближенно* въ десятичныхъ доляхъ.

При извлеченіи приближеннаго квадратнаго корня надо помнить, что (на основаніи правила умноженія десятичныхъ дробей) квадратъ десятичной дроби долженъ имѣть десятичныхъ знаковъ вдвое болѣе, чѣмъ ихъ въ корнѣ. Напр., $4{,}32^2=19{,}0096$; $0{,}012^2=0{,}000144$.

Извлечемъ квадратный корень изъ числа 3 до тысячныхъ долей. Если мы желаемъ, чтобы корень имѣлъ три десятичныхъ цифры, то данное число должно быть выражено въ мильонныхъ доляхъ. Раздробивъ 3 въ мильонныя доли, получимъ 3000000 мильонныхъ. Теперь остается только извлечь корень изъ 3000000 и отдѣлить въ корнѣ три десятичныхъ знака.

```
√3|00|00|00 = 1,732.
 1
27  | 20,0
 7  | 18 9
343 | 1 10,0
  3 | 1 02 9
3462 | 7 10,0
   2 | 6 92 4
         17 6
```

Слѣдовательно, $\sqrt{3}=1{,}732$ съ точностью до тысячной доли единицы. Въ самомъ дѣлѣ:

$1{,}732^2=2{,}999824$, т. е. менѣе 3-хъ,
$1733^2=3{,}003289$, т. е. болѣе 3-хъ;

значитъ, квадратный корень изъ 3 заключается между числами 1,732 и 1,733, которыя различаются 0,001, а потому разница между $\sqrt{3}$ и каждымъ изъ этихъ чиселъ меньше, чѣмъ на 0,001.

10. **Примѣры:**

$\sqrt{13}=3,6$ съ точн. до 0,01.

$\sqrt{19}=4,36$ " " " 0,01

$\sqrt{5}=2,236$ " " " 0,001.

$\sqrt{2}$ и $\sqrt{10}$ вычислить до 0,01

$\sqrt{20}$ и $\sqrt{30}$ " " 0,001.

11. Подобно предыдущему извлекается квадратный корень изъ десятичной дроби. Извлечемъ корень изъ 0,4 съ точностью до 0,01. Чтобы получить два десятичныхъ знака въ корнѣ, раздробляемъ 0,4 въ десятитысячныя, получимъ 4000 десятитысячныхъ, извлекаемъ изъ 4000 квадратный корень и отдѣляемъ въ корнѣ два десятичныхъ знака:

$\sqrt{0,40|00}=0,63$

	36
123	40,0
3	36 9
	3 1

Еще примѣръ: извлечь квадратный корень изъ 0,016 съ точностью до 0,001

$$\sqrt{0,01|60|00}=0,126.$$

Точно также и корень изъ 2,5 до 0,01

$$\sqrt{2,50|00}=1,58.$$

Если нужно извлечь квадратный корень изъ обыкновенной дроби, то ее обращаютъ въ десятичную и потомъ извлекаютъ корень. Напр.,

$\sqrt{\frac{2}{5}}=\sqrt{0,40|00|00}=0,632$ съ точн. до 0,001.

$\sqrt{5\frac{2}{3}}=\sqrt{5,6667}=2,38$ съ точн. до 0,01.

12. **Примѣры для упражненій:**

$\sqrt{0,2}=0,447$; $\sqrt{12,5}=3,55$; $\sqrt{0,1}=0,316$; $\sqrt{2\frac{1}{2}}=1,581$; $\sqrt{0,004}=0,063$; $\sqrt{5\frac{5}{9}}=2,357$; $\sqrt{\frac{20}{37}}=0,735$; $\sqrt{\sqrt{2}}=1,19$; $\sqrt{\sqrt{10}}=1,78$; $\sqrt{\sqrt{17}}=2,03$.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

